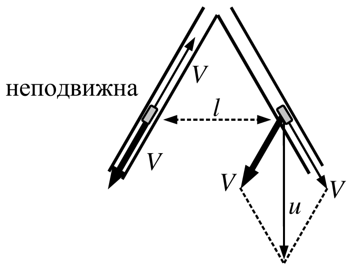
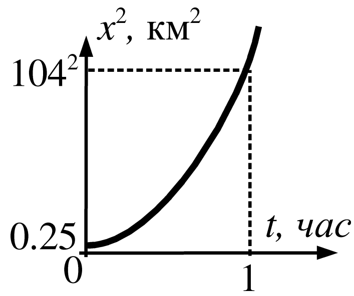
Районный тур 2010. 9 класс. I вариант

Задача 1. I вариант

Перейдем в систему отсчета, связанную с одной, например, левой машиной. Для этого к вектору скорости каждой машины необходимо добавить вектор, численно равный V и направленный в сторону, противоположную направлению движения той машины, которая в новой системе отсчета должна остановиться. Соответствующий вектор изображен жирной стрелкой на левом рис.





В этой системе отсчета левая машина покоится, а правая едет относительно нее со скоростью $\vec{u}$, вектор которой построен на левом рисунке.

Длина этого вектора, как видно из рисунка, $u = 2V\cos 30^o$, а направлен он перпендикулярно линии, соединяющей машины. Поэтому через время t вторая машина проедет в этой системе расстояние ut, и, по теореме Пифагора, расстояние между машинами станет

$$x(t) = \sqrt{(ut)^2 + l^2}.$$

Квадрат этого расстояния $x^2 = (ut)^2 + l^2$ зависит от времени квадратично, соответствующий график – парабола, см. правый рисунок.

Ответ: Расстояние между машинами $x(t) = \sqrt{(ut)^2 + l^2}$, где $u = 60\sqrt{3}$ км/ч. График зависимости – парабола с вершиной в точке $t = 0$, $x^2 = 0.25$ км^2 – представлен на правом рисунке.

Задача 2. I вариант

Первоначально Пин имеет раствор, содержащий $m_a = 100$ г вещества X на литр воды.

Несложно посчитать, при какой температуре T_a взрывается первый сосуд. По условию весь раствор имеет теплоемкость C, тогда теплоемкость половины раствора равна $C/2$. Из уравнения теплового баланса мы находим, что в результате нагревания его температура увеличилась на $\Delta T = Q/(C/2) = 9.31^o$ C, значит $T_a = 29.31^o$ C.

Когда в раствор заливают кипяток, во втором сосуде мы получаем раствор большей температуры, но меньшей концентрации, всего лишь $m_b = 50$ грамм вещества X на килограмм воды.

Пусть конечная температура раствора во втором сосуде равна T_b. Запишем уравнение теплового баланса: теплота, переданная раствору, равна теплоте, переданной залитой водой массой $M = 1$ кг:

$$(C/2)(T_b - 20^o) = cM(100^o - T_b) \qquad \Rightarrow \qquad T_b = \frac{100cM + 20(C/2)}{C/2 + cM} \simeq 58.62^o C$$

По условию в конце раствор в обоих сосудах взорвался, значит выполнялись условия

$$m_a = \beta - kT_a, \qquad m_b = \beta - kT_b,$$

подставляя сюда численные значения m_a, m_b, T_a, T_b, получим

$$100 = \beta - 29.31 \cdot k, \qquad 50 = \beta - 58.62 \cdot k. \tag{1}$$

Отсюда легко выразить коэффициенты β и k.

Можно заметить, что интересующая нас величина – критическая масса, соответствующая нулевой температуре – численно равна коэффициенту β. Проще всего выразить его из системы (1), домножив первое уравнение на два, и вычтя одно уравнение из другого.

Ответ: Пину нужно 150 грамм вещества X.

Задача 3. I вариант

Отметим, что параметр h меняется от нуля до H. Предположим сначала, что горка достаточно длинная.

Пока весь поезд едет по горизонтальному участку, искомая сила натяжения сцепки в середине поезда $T = 0$.

Действительно, рассмотрим хвостовую половину поезда. Действующие на нее силы должны быть скомпенсированы, так как движение равномерно. Внешние горизонтальные силы, действующие на эту половину поезда, это T, сила, с которой головная половина поезда тянет хвостовую, и F_{TP}, сопротивление воздуха и рельсов. Но по условию силами трения можно пренебречь, значит $T = 0$.

Пусть середина поезда еще не въехала на горку, т.е. путь, пройденный паровозом по горке $h/\sin\alpha = 2h$ меньше чем $L/2$. Соображения предыдущего абзаца остаются справедливыми, и по-прежнему $T = 0$.

Пусть теперь некоторые вагоны хвостовой части уже въехали на горку, $2h > L/2$. Снова рассмотрим хвостовую половину поезда. Вперед по рельсам эту половину тянет сила T, но теперь этой силе противостоит проекция силы тяжести на направление движения вагонов, которая ненулевая для тех вагонов хвостовой половины, которые уже на горке. Будем называть такие вагоны хвостовой половины тормозящими.

Суммарная длина таких вагонов $2h - L/2$, а их масса $M' = M(2h - L/2)/L$. Проекция силы тяжести тормозящих вагонов на направление горки

$$M'g\sin\alpha = \frac{M(4h-L)g\sin\alpha}{2L} = \frac{M(4h-L)g}{4L},$$

и именно такой должна быть T, чтобы поезд ехал равномерно.

Видно, что с ростом h величина T будет расти. Однако это будет происходить только пока вся хвостовая часть не въедет на горку целиком.

Если же поезд целиком въехал на горку ($2h > L$), число тормозящих вагонов перестает меняться. Их масса $M' = M/2$, а проекция их силы тяжести на направление движения поезда $(M/2)g\sin\alpha = Mg/4$. Значит, и сила T будет теперь равна $Mg/4$.

График, соответствующий найденному решению представлен на рис. 1.

Однако может так случиться, что весь поезд не помещается на горке. Пусть при этом *половина поезда* все же помещается на ней, т.е. $L/2 < 2H < L$. Тогда к моменту, когда $h = H$, масса тормозящих вагонов будет $M' = M(2H - L/2)/L$, а натяжение сцепки достигнет лишь значения $M'g\sin\alpha$. При дальнейшем движении поезда сила натяжения интересующей нас сцепки все же возрастет до $Mg/4$, однако это произойдет, когда паровоз уже поднялся на горку (при $h = H$). Соответствующий график см. на рис. 2.

Наконец, если даже половина поезда не помещается на горке, при $h < H$ хвостовая половина еще не въехала на горку, и $T = 0$. При дальнейшем движении поезда (что соответствует $h = H$) масса тормозящих вагонов достигает максимального значения $M' = 2MH/L$, сила серединной сцепки при этом увеличивается до $M'g\sin\alpha = MgH/L$. Соответствующий график см. на рис. 3.

Ответ: Если горка достаточно длинная, $H > L/2$, график изображен на рис. 1. Если $L/4 < H < L/2$, график изображен на рис. 2. В противном случае график изображен на рис. 3.

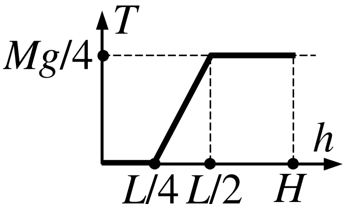


Рис. 1:

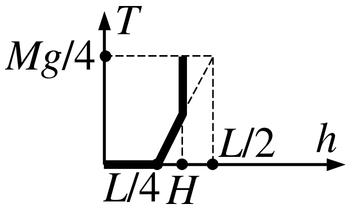


Рис. 2:

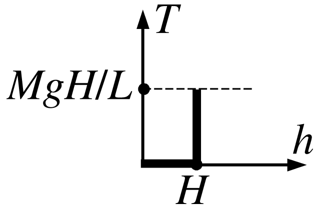


Рис. 3:

Задача 4. I вариант

Как только Гомер отпустил веревку, бочка перевесила Барта, так что и Барт и бочка стали двигаться с некоторым ускорением a, бочка – вниз, а Барт – вверх. Найдем это ускорение.

Второй закон Ньютона для Барта и бочки в проекции на ось, направленную вверх, имеет вид

$$-Ma = -Mg + T, \qquad ma = -mg + T,$$

здесь T – сила натяжения веревки, перекинутой через блок. Вычитая первое уравнение из второго, получим $ma + Ma = -mg + Mg$, откуда легко выражается

$$a = \frac{(M-m)}{M+m}g. \tag{2}$$

Этот же результат для ускорения можно получить иначе. Рассмотрим систему 'Барт и бочка' массой $m + M$, в проекции на направление ее движения. Она пришла в движение под действием $F = Mg - mg$ (разности сил тяжести, действующих на Барта и бочку). Значит, до столкновения Барт и бочка двигаются с ускорением $a = F/(M + m)$, что совпадает с (2)

С этим ускорением и Барт и бочка пролетели до столкновения путь $H/2$ каждый. Это заняло время t_1, такое, что

$$H/2 = at_1^2/2 \qquad => \qquad t_1 = \sqrt{\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{H(M+m)}{(M-m)g}} = 1.2 \text{ с.}$$

Далее бочка движется в поле силы тяжести с начальной скоростью V, уравнение ее движения в проекции на ось, направленную вверх: $y(t) = H/2 + Vt - gt^2/2$. В момент t_2, когда y обратилось в ноль, бочка упала. Решая квадратное уравнение на t_2

$$y(t_2) = H/2 + Vt_2 - gt_2^2/2 = 0,$$

получим

$$t_2 = \frac{V \pm \sqrt{V^2 + gH}}{g}$$

и единственное положительное значение $t_2 = 0.9$ с. Ответ дается суммой t_1 и t_2.

Ответ: Секундомер покажет 2.1 с.

Задача 5. I вариант

Поскольку восьмерки скручены из изолированных проводов, и в середине нет контакта, их можно мысленно раскрутить, превратив в круги (разумеется, не нарушая спайки в точках A и B).

Если восьмерки были перекручены в одну сторону, эквивалентная схема изображена на рис. 4. Черными линиями здесь и далее нарисованы соединительные провода, сопротивлением которых можно пренебречь.

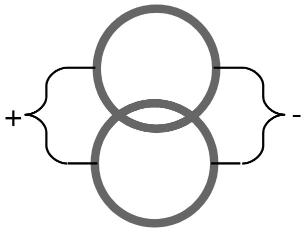


Рис. 4:

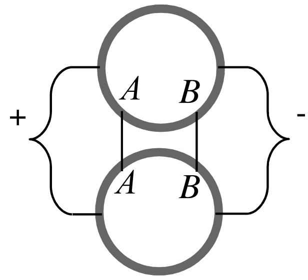


Рис. 5:

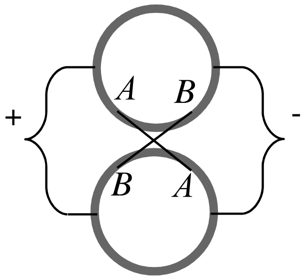


Рис. 6:

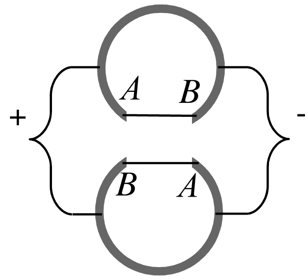


Рис. 7:

Эту схему можно перерисовать, как на рис. 5 (AA и BB – провода, обеспечивающие спайку двух колец).

По проводам AA и BB в этой схеме ток не потечет из симметрии схемы. Действительно, предположим, что по проводу AA течет вверх ток I. Если мы отразим схему относительно горизонтальной оси симметрии, ток по поводу AA станет течь вниз $(-I)$. Однако при отражении схема не изменилась, то есть по AA должен течь ток I вверх, отсюда получается $I = -I$, т.е. $I = 0$. Итак, ток по проводу AA не течет, аналогично обстоит дело с проводами BB. Значит, эти провода не влияют на сопротивление схемы, и их можно выбросить.

Полное сопротивление оставшихся двух несоединенных колец не зависит от сопротивления между точками A и B. Каждое кольцо, подключенное таким образом эквивалентно схеме состоящей из двух одинаковых параллельно соединенных проводников сопротивлением $R/2$. Ее сопротивление равно $R/4$. Вся схема представляет собой два таких кольца, соединенных параллельно, ее сопротивление равно $R/8$.

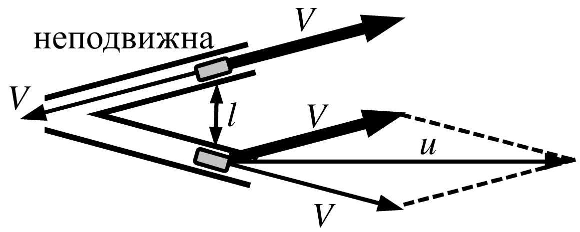
Однако, если восьмерки были перекручены в разные стороны, эквивалентная схема примет вид как на рис. 6 (провода AA и BB скрещиваются, обеспечивая спайку двух колец, но в точке их скрещивания контакта нет). Схема также симметрична, поэтому во всех точках A и B одинаковый потенциал. Значит, на кольцах между точками A и B падение напряжения равно нулю, следовательно, ток по этим участкам колец не течет, и их можно выкинуть. Эквивалентная схема представлена на рис. 7, это два одинаковых куска кольца, соединенных параллельно. Каждый из таких кусков, как видно из рисунка, представляет собой половину кольца соединенную параллельно с половиной кольца, из которой выкинули участок AB (сопротивление каждого такой конструкции $R/6$). Тогда сопротивление всей схемы в этом случае равно $R/12$.

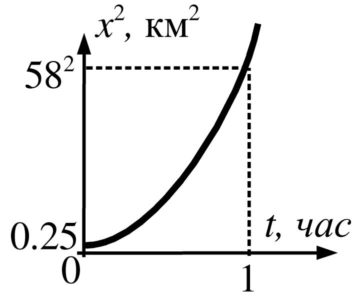
Ответ: $R/8$ или $R/12$ в зависимости от того, были ли восьмерки перекручены в одну, или в разные стороны.

Районный тур 2010. 9 класс. II вариант

Задача 1. II вариант

Перейдем в систему отсчета, связанную с одной, например, машиной, расположенной на рисунке выше. Для этого к вектору скорости каждой машины необходимо добавить вектор, численно равный V и направленный в сторону, противоположную направлению движения той машины, которая в новой системе отсчета должна остановиться. Соответствующий вектор изображен жирной стрелкой на левом рис





В этой системе отсчета машина, расположенная на рисунке выше, покоится, а вторая машина едет относительно нее со скоростью $\vec{u}$, вектор которой построен на левом рисунке.

Длина этого вектора, как видно из рисунка, $u = 2V\cos 15^o$, а направлен он перпендикулярно линии, соединяющей машины. Поэтому через время t вторая машина проедет в этой системе расстояние ut, и, по теореме Пифагора, расстояние между машинами станет

$$x(t) = \sqrt{(ut)^2 + l^2}.$$

Квадрат этого расстояния $x^2 = (ut)^2 + l^2$ зависит от времени квадратично, соответствующий график – парабола, см. правый рисунок.

Ответ: Расстояние между машинами $x(t) = \sqrt{(ut)^2 + l^2}$, где $u \simeq 58$ км/ч. График зависимости – парабола с вершиной в точке $t = 0$, $x^2 = 0.25$ км^2 – представлен на правом рисунке.

Задача 2. II вариант

Первоначально Пин имеет раствор, содержащий $m_a = 250$ г вещества X на литр воды.

Несложно посчитать, при какой температуре T_a взрывается первый сосуд. По условию весь раствор имеет теплоемкость C, тогда теплоемкость половины раствора равна $C/2$. Из уравнения теплового баланса мы находим, что в результате нагревания его температура увеличилась на $\Delta T = Q/(C/2) = 9.31^o$ C, значит $T_a = 29.31^o$ C.

Когда в раствор заливают кипяток, во втором сосуде мы получаем раствор большей температуры, но меньшей концентрации, всего лишь $m_b = 125$ грамм вещества X на килограмм воды.

Пусть конечная температура раствора во втором сосуде равна T_b. Запишем уравнение теплового баланса: теплота, переданная раствору, равна теплоте, переданной залитой водой массой $M = 1$ кг:

$$(C/2)(T_b - 20^o) = cM(100^o - T_b) \qquad \Rightarrow \qquad T_b = \frac{100cM + 20(C/2)}{C/2 + cM} \simeq 58.62^oC$$

По условию в конце раствор в обоих сосудах взорвался, значит выполнялись условия

$$m_a = \beta - kT_a, \qquad m_b = \beta - kT_b,$$

подставляя сюда численные значения m_a, m_b, T_a, T_b, получим

$$250 = \beta - 29.31 \cdot k, \qquad 125 = \beta - 58.62 \cdot k. \tag{1}$$

Отсюда легко выразить коэффициенты β и k.

Можно заметить, что интересующая нас величина – критическая масса, соответствующая нулевой температуре – численно равна коэффициенту β. Проще всего выразить его из системы (1), домножив первое уравнение на два, и вычтя одно уравнение из другого.

Ответ: Пину нужно 375 грамм вещества X.

Задача 3. II вариант

Отметим, что параметр l меняется от нуля до $2H$. Предположим сначала, что горка достаточно длинная.

Пока весь поезд едет по горизонтальному участку, искомая сила натяжения сцепки в середине поезда $T = 0$.

Действительно, рассмотрим хвостовую половину поезда. Действующие на нее силы должны быть скомпенсированы, так как движение равномерно. Внешние горизонтальные силы, действующие на эту половину поезда, это T, сила, с которой головная половина поезда тянет хвостовую, и F_{TP}, сопротивление воздуха и рельсов. Но по условию силами трения можно пренебречь, значит $T = 0$.

Пусть середина поезда еще не въехала на горку, т.е. путь, пройденный паровозом по горке l меньше чем $L/2$. Соображения предыдущего абзаца остаются справедливыми, и по-прежнему $T = 0$.

Пусть теперь некоторые вагоны хвостовой части уже въехали на горку, $l > L/2$. Снова рассмотрим хвостовую половину поезда. Вперед по рельсам эту половину тянет сила T, но теперь этой силе противостоит проекция силы тяжести на направление движения вагонов, которая ненулевая для тех вагонов хвостовой половины, которые уже на горке. Будем называть такие вагоны хвостовой половины тормозящими.

Суммарная длина таких вагонов $l - L/2$, а их масса $M' = M(l - L/2)/L$. Проекция силы тяжести тормозящих вагонов на направление горки

$$M'g\sin\alpha = \frac{M(2l - L)g\sin\alpha}{2L} = \frac{M(2l - L)g}{4L},$$

и именно такой должна быть T, чтобы поезд ехал равномерно.

Видно, что с ростом l величина T будет расти. Однако это будет происходить только пока вся хвостовая часть не въедет на горку целиком.

Если же поезд целиком въехал на горку ($l > L$), число тормозящих вагонов перестает меняться. Их масса $M' = M/2$, а проекция их силы тяжести на направление движения поезда $(M/2)g\sin\alpha = Mg/4$. Значит, и сила T будет теперь равна $Mg/4$.

График, соответствующий найденному решению представлен на рис. 1.

Однако может так случиться, что весь поезд не помещается на горке. Пусть при этом *половина поезда* все же помещается на ней, т.е. $L/2 < 2H < L$. Тогда к моменту, когда паравоз пройдет весь путь по наклонному участку ($l = 2H$), масса тормозящих вагонов будет $M' = M(2H - L/2)/L$, а натяжение сцепки достигнет лишь значения $M'g\sin\alpha$. При дальнейшем движении поезда сила натяжения интересующей нас сцепки все же возрастет до $Mg/4$, однако это произойдет, когда паровоз уже поднялся на горку (при $h = H$). Соответствующий график см. на рис. 2.

Наконец, если даже половина поезда не помещается на горке, при $l < 2H$ хвостовая половина еще не въехала на горку, и $T = 0$. При дальнейшем движении поезда (что соответствует $l = 2H$) масса тормозящих вагонов достигает максимального значения $M' = 2MH/L$, сила серединной сцепки при этом увеличивается до $M'g\sin\alpha = MgH/L$. Соответствующий график см. на рис. 3.

Ответ: Если горка достаточно длинная, $H > L/2$, график изображен на рис. 1. Если $L/4 < H < L/2$, график изображен на рис. 2. В противном случае график изображен на рис. 3.

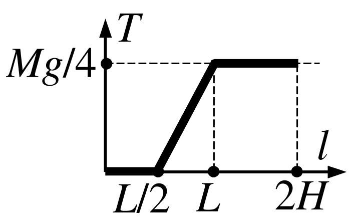


Рис. 1:

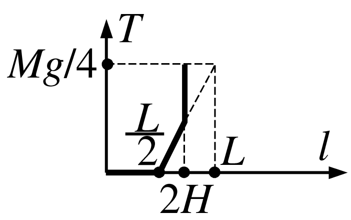


Рис. 2:

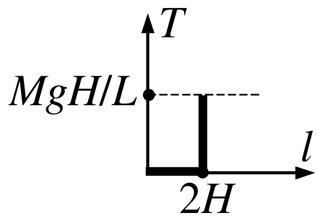


Рис. 3:

Задача 4. II вариант

Как только Гомер отпустил веревку, бочка перевесила Барта, так что и Барт и бочка стали двигаться с некоторым ускорением a, бочка – вниз, а Барт – вверх. Найдем это ускорение.

Второй закон Ньютона для Барта и бочки в проекции на ось, направленную вверх, имеет вид

$$-Ma = -Mg + T, \qquad ma = -mg + T,$$

здесь T – сила натяжения веревки, перекинутой через блок. Вычитая первое уравнение из второго, получим $ma + Ma = -mg + Mg$, откуда легко выражается

$$a = \frac{(M-m)}{M+m}g. \tag{2}$$

Этот же результат для ускорения можно получить иначе. Рассмотрим систему 'Барт и бочка' массой $m + M$, в проекции на направление ее движения. Она пришла в движение под действием $F = Mg - mg$ (разности сил тяжести, действующих на Барта и бочку). Значит, до столкновения Барт и бочка двигаются с ускорением $a = F/(M + m)$, что совпадает с (2)

С этим ускорением и Барт и бочка пролетели до столкновения путь $H/2$ каждый. Это заняло время t_1, такое, что

$$H/2 = at_1^2/2 \qquad => \qquad t_1 = \sqrt{\frac{H}{a}} = \sqrt{\frac{H(M+m)}{(M-m)g}} = 1.2 \text{ с.}$$

Далее бочка движется в поле силы тяжести с начальной скоростью V, уравнение ее движения в проекции на ось, направленную вверх: $y(t) = H/2 - Vt - gt^2/2$. В момент t_2, когда y обратилось в ноль, бочка упала. Решая квадратное уравнение на t_2

$$y(t_2) = H/2 - Vt_2 - gt_2^2/2 = 0,$$

получим

$$t_2 = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 + gH}}{g}$$

и единственное положительное значение $t_2 = 0.7$ с. Ответ дается суммой t_1 и t_2.

<u>Ответ:</u> Секундомер покажет 1.9 с.

Задача 5. II вариант

Поскольку восьмерки скручены из изолированных проводов, и в середине нет контакта, их можно мысленно раскрутить, превратив в круги (разумеется, не нарушая спайки в точках A и B).

Если восьмерки были перекручены в одну сторону, эквивалентная схема изображена на рис. 4. Черными линиями здесь и далее нарисованы соединительные провода, сопротивлением которых можно пренебречь.

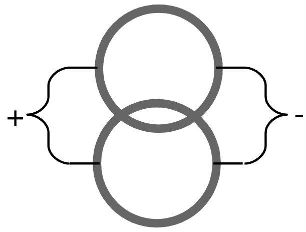


Рис. 4:

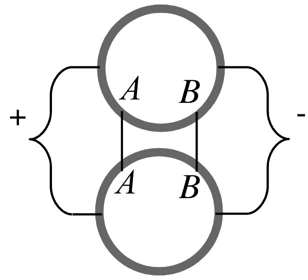


Рис. 5:

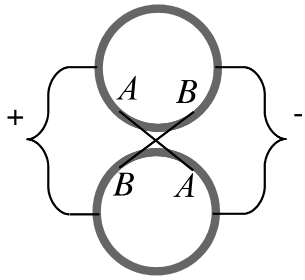


Рис. 6:

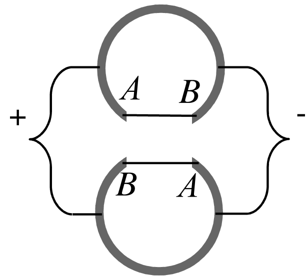


Рис. 7:

Эту схему можно перерисовать, как на рис. 5 (AA и BB – провода, обеспечивающие спайку двух колец).

По проводам AA и BB в этой схеме ток не потечет из симметрии схемы. Действительно, предположим, что по проводу AA течет вверх ток I. Если мы отразим схему относительно горизонтальной оси симметрии, ток по поводу AA станет течь вниз $(-I)$. Однако при отражении схема не изменилась, то есть по AA должен течь ток I вверх, отсюда получается $I = -I$, т.е. $I = 0$. Итак, ток по проводу AA не течет, аналогично обстоит дело с проводами BB. Значит, эти провода не влияют на сопротивление схемы, и их можно выбросить.

Полное сопротивление оставшихся двух несоединенных колец не зависит от сопротивления между точками A и B. Каждое кольцо, подключенное таким образом эквивалентно схеме состоящей из двух одинаковых параллельно соединенных проводников сопротивлением $R/2$. Ее сопротивление равно $R/4$. Вся схема представляет собой два таких кольца, соединенных параллельно, ее сопротивление равно $R/8$.

Однако, если восьмерки были перекручены в разные стороны, эквивалентная схема примет вид как на рис. 6 (провода AA и BB скрещиваются, обеспечивая спайку двух колец, но в точке их скрещивания контакта нет). Схема также симметрична, поэтому во всех точках A и B одинаковый потенциал. Значит, на кольцах между точками A и B падение напряжения равно нулю, следовательно, ток по этим участкам колец не течет, и их можно выкинуть. Эквивалентная схема представлена на рис. 7, это два одинаковых куска кольца, соединенных параллельно. Каждый из таких кусков, как видно из рисунка, представляет собой половину кольца соединенную параллельно с половиной кольца, из которой выкинули участок AB (сопротивление такой конструкции равно $R/8$). Тогда сопротивление всей схемы в этом случае равно $R/16$.

Ответ: $R/8$ или $R/16$ в зависимости от того, были ли восьмерки перекручены в одну, или в разные стороны.