Условие

Когда в доме включили отопление, температура в комнате стала медленно расти и за 45 минут увеличилась на 5 °C. Найдите, с какой средней скоростью (в мм/ч) поднимался верхний край столбика ртути. Для удобства слева от шкалы термометра приложили линейку (рис. 1).

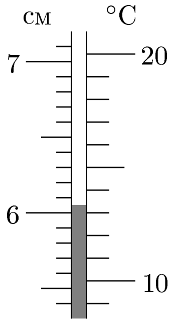

Рис. 1

Ориентировочная система оценивания

Нахождение совмещённых рисок 2
Связь между делениями двух шкал 3
Приведение величин к миллиметрам и часам 2
Ответ 3

Возможное решение

Найдём на рисунке совмещённые риски шкал линейки и термометра. Например, 69 мм соответствует 19 °C, а 60 мм — 13 °C. Расчёт показывает, что на 2 °C приходятся 3 мм, значит 5 °C соответствуют 3 мм $\cdot$ 5/2 = 7,5 мм. Таким образом, зная, что 45 мин = 0,75 ч, получим окончательно, что средняя скорость верхнего края столбика ртути составила 7,5 мм/0,75 ч = 10 мм/ч.

Условие

Отправляясь навестить Кролика, Винни-Пух заметил, что его настенные часы стоят, показывая 10 часов 35 минут. Он их завёл и пошёл в гости. Войдя в дом к Кролику, первым делом Винни посмотрел на часы. На них было 10 часов 10 минут. Через 3 часа, после того как весь мёд был съеден, медвежонок отправился в обратный путь. Когда он вернулся, его часы показывали 2 часа 5 минут. Винни немедленно перевёл стрелки на точное время. Какое время он выставил на своих часах? Известно, что всё путешествие заняло меньше шести часов.

Ориентировочная система оценивания

Определение полного времени отсутствия Винни-Пуха дома 4
Определение времени, затраченного медвежонком на дорогу 3
Ответ 3

Возможное решение

Когда Винни-Пух вернулся домой, его неверно выставленные часы показывали 14 часов 5 минут (2 часа 5 минут + 12 часов = 14 часов 5 минут). Значит, дома он отсутствовал 3 часа 30 минут (14 часов 5 минут − 10 часов 35 минут = = 3 часа 30 минут). Поскольку в гостях Винни-Пух провёл 3 часа, на дорогу в оба конца он затратил 30 минут (3 часа 30 минут − 3 часа = 30 минут). В один конец он шёл 15 минут. От Кролика Винни вышел (по точным часам) в 13 часов 10 минут (10 часов 10 минут + 3 часов = 13 часов 10 минут), а домой вернулся через 15 минут, то есть в 13 часов 25 минут. Это время он и выставил на своих часах.

Условие

В мастерской изготовили из алюминия плотности $\rho_1 = 2{,}70$ г/см^3 куб с ребром $a = 10$ см. Внутри куба осталась полость, которую потом залили свинцом плотности $\rho_2 = 11{,}30$ г/см^3. В результате измерений неопытный лаборант подумал, что перед ним кубик из латуни плотности $\rho = 8{,}72$ г/см^3. Определите объём полости в кубе.

Ориентировочная система оценивания

Выражение для массы куба через измеренную плотность 2
Выражение для массы куба через неизвестный объём полости 4
Ответ 4

Возможное решение

Объём куба $V = a^3 = 1000$ см^3. Пусть объём полости v, тогда масса куба:

$$m = V\rho = (V - v)\rho_1 + v\rho_2, \qquad \text{откуда найдём} \qquad v = V\frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} = 700 \text{ см}^3.$$

Условие

Честный мальчик Петя вышел из дома в школу. По дороге он нашёл велосипед и, поскольку опаздывал, решил воспользоваться находкой и доехать на нём, подумав, что потом обязательно вернёт велосипед на место. В результате, вся дорога в школу заняла 14 минут.

Возвращаясь обратно, он вспомнил о своём намерении только подъезжая к дому. Пете стало стыдно, и он вернулся к месту находки, оставил там велосипед и пешком дошёл до дома. Таким образом, дорога из школы заняла у него 22 минут.

Как далеко от дома лежал велосипед, если на нём Петя мчался со скоростью 15 км/ч.

Ориентировочная система оценивания

Путь на велосипеде от дома до места находки занимает 4 минуты 5
Переход к одним единицам измерения 1
Ответ 4

Возможное решение

По дороге в школу Петя сначала прошёл путь от дома до места находки и на велосипеде проехал до школы. По дороге обратно он сперва проехал путь от школы до места находки, потом съездил до дома и обратно и уже пешком дошёл от места находки до дома. Получается, что время возвращения из школы отличается от путешествия на занятия только на продолжительность поездки на велосипеде от места находки до дома и обратно. На эту поездку у Пети ушло $(22 - 14)$ мин $= 8$ мин. Следовательно, чтобы проехать искомое расстояние на велосипеде, Пете нужно всего $(8/2)$ мин $= 4$ мин. Учитывая, что 15 км/ч $= 15/60$ (км/мин) $= 0{,}25$ км/мин, получим, что расстояние от дома до места находки составляет 4 мин $\cdot\, 0{,}25$ км/мин $= 1$ км.

Условие

Экспериментатор Глюк наблюдал за встречным движением скорого поезда и электрички. Оказалось, что каждый из поездов прошёл мимо Глюка за одно и то же время $t_1 = 23$ с. А в это время друг Глюка, теоретик Баг, ехал в электричке и определил, что скорый поезд прошёл мимо него за $t_2 = 13$ с. Во сколько раз скорый поезд длиннее электрички?

Ориентировочная система оценивания

Отношение скоростей поезда и электрички 5

Отношение длины поезда к длине электрички 5

Возможное решение

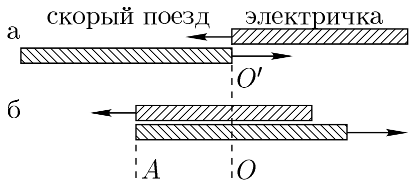

Рис. 2

Пусть Баг находился в начале электрички, а Глюк стоял на линии OO', где повстречались поезд и электричка (рис. 2 а). Рассмотрим ситуацию через 13 с, когда Баг поравнялся с концом скорого поезда (рис. 2 б). Получается, что расстояние OA Баг проехал за $t_2 = 13$ с. Потом конец скорого поезда то же самое расстояние AO проехал за оставшиеся $t = t_1 - t_2 = 10$ с. Следовательно, скорый поезд ехал быстрее в $\alpha = t_2/t = 1{,}3$ раза. С другой стороны, каждый из поездов прошёл расстояние равное своей длине за одно и то же время $t_1 = 23$ с.

Это могло быть только в том случае, если скорый поезд длиннее электрички в $\alpha = 1{,}3$ раза.

Условие

Экспериментатор Глюк проводил исследования с телами равного объёма. Он удерживал с помощью динамометра тело полностью погруженным в воду и обнаружил, что во всех опытах показания динамометра составляли либо $F_1 = 1$ Н, либо $F_2 = 2$ Н. Плотность самого тяжёлого тела Глюк определил экспериментально: $\rho_т = 1{,}4$ г/см^3.

1. Определите объём V одного тела.

2. Найдите все возможные для описанного опыта плотности других тел.

Примечание. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, $g = 9{,}8$ Н/кг.

Ориентировочная система оценивания

Условие равновесия самого тяжелого тела 2
Возможные значения объёма самого тяжелого тела 1
Условия равновесия других тел 3
Возможные плотности других тел... 4

Возможное решение

В условии задачи не указано, как именно Глюк удерживал тела, поэтому их плотности могли быть как больше плотности воды (и тогда удерживающая их сила динамометра была направлена вверх), так и меньше её (удерживающая сила была направлена вниз). Также не сказано, какую силу показывал динамометр в опыте с телом указанной плотности. Таким образом, возможны различные варианты.

1. Так как плотность самого тяжелого тела $\rho_т > \rho_0$, удерживающая сила $F_т$ направлена вверх. Из равновесия тела:

$$F_A + F_т = mg, \qquad \rho_0 gV + F_т = \rho_т gV, \qquad V = \frac{F_т}{g(\rho_т - \rho_0)}.$$

Если показания динамометра в этом опыте составили $F_т = F_2 = 2$ Н, то $V = 0{,}51$ л. Если же $F_т = F_1 = 1$ Н, то $V = 0{,}255$ л. (Если Глюк определил $\rho_т$ при $F_т = F_1$, значит силу $F_2 = 2$ Н он мог получить только, когда тело было легче воды и удерживающая сила была направлена вниз.)

2. Найдём возможные плотности ρ_i тел, когда показания динамометра составляли F_i:

$$F_A \pm F_i = \rho_i gV, \qquad \rho_i = \rho_0 \pm (\rho_т - \rho_0)\frac{F_i}{F_т},$$

где знак плюс выбирается, если удерживающая сила направлена вверх, и минус, если в другую сторону.

Таким образом, в первом случае, когда $F_т = 2$ Н, возможные значения для плотности составят $\rho_i = 1{,}4;\ 1{,}2;\ 0{,}8;\ 0{,}6$ г/см^3. В случае, когда $F_т = 1$ Н, $\rho_i = 1{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}2$ г/см^3. (В принципе, подставляя $F_i = 2$ Н и знак плюс, можно получить плотность $\rho_i = 1{,}8$ г/см^3, но тогда $\rho_т = 1{,}4$ г/см^3 не будет самой большой плотностью, что противоречит условию задачи.)

Условие

Теоретику Багу подарили английский барометр, который измеряет давление в необычных для нас (и обычных для англичан) единицах psi (с англ. **p**ound-force per **s**quare **i**nch — давление, которое оказывает вес одного фунта на квадратный дюйм). Багу захотелось перевести показания 15,0 psi в паскали. К сожалению, у него не оказалось таблиц для перевода единиц измерения давления, но он обнаружил финансовый журнал, в котором нашёл статью, посвящённую стоимости золота в России и Англии.

Таблица 1

	В России	В Англии
Слитки	522,0 тыс. руб./кг	5 413 £/фунт
Проволока	10,07 тыс. руб./метр	5,845 £/дюйм

Золото можно было купить либо в слитках, либо в проволоке стандартного сечения (табл. 1). Помогите Багу понять сколько паскалей всё-таки показывает барометр, если реальная стоимость золота в России и Англии одинакова, а по данным Центробанка фунт стерлингов стоит £ = 43 рубля 78 копеек. Принять $g = 9{,}8$ Н/кг.

Ориентировочная система оценивания

Выражение для килограммов через фунты и для метров через дюймы 4
Выражение для веса одного фунта и площади квадратного фута 2
Ответ 4

Возможное решение

Определим коэффициент пересчёта килограммов в фунты. Один фунт золота стоит (5 413·43,78) руб. ≈ 237,0 тыс. руб. Следовательно, один килограмм составляет (522,0/237,0) фунтов = 2,203 фунта. Аналогично найдём, что один метр составляет (10 070/(5,845 · 43,78)) дюйма = 39,35 дюйма.

Таким образом, 15,0 фунтов имеют вес (9,8 · 15,0/2,203) Н = 66,73 Н, который приходится на площадь $(1/39{,}35)^2$ м^2 = $6{,}457 \cdot 10^{-4}$ м^2. Окончательно получим:

$$15{,}0 \text{ psi} = \frac{66{,}73}{6{,}457 \cdot 10^{-4}} \text{ Па} = 103{,}3 \text{ кПа}.$$

Условие

Экспериментатор Глюк создал «джоулеметр». Прибор состоял из алюминиевого стаканчика, частично заполненного водой. Стаканчик был обёрнут пенопластом (для исключения теплообмена с окружающей средой). Через небольшое отверстие в пенопластовой крышке Глюк опустил в стакан термометр, позволяющий измерять температуру в диапазоне от +10 до +90 °C. Цена деления термометра 1 °C. Масса стаканчика $m = 50$ г. Рядом со шкалой термометра Глюк поместил подвижную шкалу с ценой деления в 1 кДж. Перед началом эксперимента он откалибровал «энергетическую» шкалу так, чтобы её ноль совпал с начальной температурой воды в «джоулеметре». Затем экспериментатор поместил в прибор испытуемое тело (горячее или холодное) и после установления теплового равновесия определил по энергетической шкале, сколько джоулей отдало (получило) тело в результате теплообмена с прибором.

1. Сколько воды было в приборе, если одному делению шкалы термометра соответствует одно деление шкалы «джоулеметра»?

2. В каком диапазоне можно измерять количество теплоты, отданное или полученное исследуемым телом, если начальная температура «джоулеметра» была +20 °C?

Удельная теплоёмкость алюминия $c = 920$ Дж/(кг·°C), теплоёмкость воды $c_0 = 4200$ Дж/(кг · °C).

Ориентировочная система оценивания

Определение массы воды 5

Определение пределов измеряемого количества теплоты 5

Возможное решение

Обозначим масштаб шкалы джоулеметра $\alpha = 1$ кДж/°C. Выразим полученное прибором количество теплоты через изменение температуры $Q = \alpha\cdot\Delta t$.

1. Пусть масса воды равна m_0. Полученное системой тепло идёт на нагрев воды и стаканчика:

$$Q = \alpha\Delta t = (cm + c_0 m_0)\Delta t, \qquad \text{и} \qquad m_0 = \frac{\alpha - cm}{c_0} \approx 227 \text{ г.}$$

2. Поскольку количество полученной теплоты пропорционально изменению температуры, то пределы для количества теплоты находятся из пределов температуры джоулеметра:

$$t_{\min} - t_0 < \Delta t < t_{\max} - t_0, \qquad \alpha(t_{\min} - t_0) < Q < \alpha(t_{\max} - t_0),$$

$$-10 \text{ кДж} < Q < 70 \text{ кДж}.$$

Заметим, что если исследуемый образец отдаёт тепло ($Q > 0$), то температура растёт, а если он получает тепло ($Q < 0$), то температура падает.

Условие

Толщина сидения деревянного табурета «Лакк» равна толщине ножек. Основными стандартными показателями табуретов «Лакк» являются давление $p_0 = 2{,}8$ кПа, которое он оказывает на пол, стоя на ножках, и коэффициент $\beta_0 = 1{,}6$, равный отношению площади сидения к площади поверхности одной из боковых сторон.

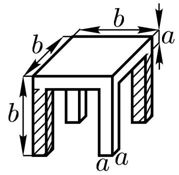

Рис. 3

Экспериментатору Глюку привезли бракованный табурет: у него не хватает двух противоположных ножек (рис. 3). Какими показателями p_1 и β_1 будет довольствоваться экспериментатор?

Ориентировочная система оценивания

Выражение для β_0 через размеры табурета 2
Связь размеров a и b 2
Нахождение объёма и веса бракованного табурета 2
Давление p_1 2
Коэффициент β_1 2

Возможное решение

Обозначим за P_0 вес стандартного табурета. Тогда $p_0 = P_0/(4a^2)$. Площадь боковой части табурета $s_1 = b^2 - (b-a)(b-2a) = 3ab - 2a^2$, а площадь сидения $S_1 = b^2$. Тогда для коэффициента β_0:

$$\beta_0 = \frac{S_1}{s_1} = \frac{1}{3x - 2x^2} = 1{,}6,$$

где $x = a/b$. Отсюда получим уравнение $16x^2 - 24x + 5 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 1/4$ и $x_2 = 5/4$. Поскольку $0 < x < 1/2$, то $a = b/4$.

Объём стандартного табурета «Лакк» складывается из объёма сидения $V_\text{с} = ab^2 = b^3/4$ и четырёх объёмов ножек $V_\text{н} = a^2(b-a) = 3b^3/64$. То есть $V_0 = V_\text{с} + 4V_\text{н} = 7b^3/16$. Объём бракованного табурета $V_1 = V_\text{с} + 2V_\text{н} = 11b^3/32$, а его вес $P_1 = (V_1/V_0)P_0 = (11/14)P_0$. С другой стороны, суммарная площадь основания ножек уменьшается вдвое. Следовательно, $p_1 = 2 \cdot (11/14)p_0 = 4{,}4$ кПа. А коэффициент β_1:

$$\beta_1 = \frac{b^2}{b^2 - (b-a)^2} = \frac{1}{2x - x^2} = \frac{16}{7} \approx 2{,}3.$$

Условие

Два стакана высотой $4H$ заполнены до уровня $3H$ водой и маслом соответственно (рис. 4). Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3, а плотность масла $\rho_{\text{М}} = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубочкой с краном. Открытые концы трубки погружены на $2H$ в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыть?

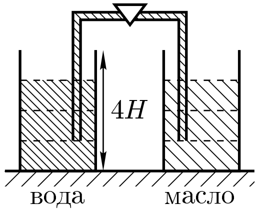

Рис. 4

Ориентировочная система оценивания

Условие равенства давлений на уровне концов трубки 5
Высота столба перетёкшей воды 2
Ответ 3

Возможное решение

Изначально давления у левого и правого открытых концов трубки разные, и, так как плотность воды больше плотности масла, вода начнет переливаться по трубке в сосуд с маслом. Там вода будет опускаться на дно и достигнет некой высоты h. Предположим $h < H$. Тогда условие равенства давлений по обе стороны трубки:

$$p_1 = \rho_0 g(2H - h) = p_2 = \rho_{\text{М}} g(2H + h), \qquad h = 2H\frac{\rho_0 - \rho_{\text{М}}}{\rho_0 + \rho_{\text{М}}} = \frac{2}{9}H < H.$$

Таким образом, наше предположение было верным и уровень воды в сосуде с маслом не поднялся выше уровня открытых концов трубки, и также масло не начало выливаться из сосуда. Окончательно, уровни жидкости в сосуде с водой h_1 и в сосуде, в котором было масло, h_2:

$$h_1 = 3H - h = 2\frac{7}{9}H, \qquad h_2 = 3H + h = 3\frac{2}{9}H.$$

Условие

В электрической цепи (рис. 5) сопротивление резисторов $R_0 = 15$ Ом, $r = 16$ Ом. Параллельно резистору r подсоединён электронный ключ D (диод). Вычислите сопротивление резистора R_1, если суммарная мощность, выделяемая на резисторах R_1 и r, не зависит от полярности приложенного напряжения.

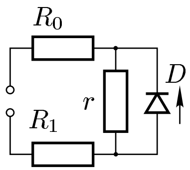

Рис. 5

Примечание. Полупроводниковый диод — это электронное устройство, которое пропускает электрический ток только в одном направлении (по стрелке на рисунке 5). При этом сопротивление диода пренебрежимо мало.

Ориентировочная система оценивания

Выражения мощностей для обеих полярностей приложенного напряжения . 5
Получение квадратного уравнения для R_1 2
Ответ 3

Возможное решение

Сила тока, проходящего через резистор R_1, когда электронный ключ замкнут (резистор r закорочен), равна $I_1 = U/(R_0 + R_1)$. Суммарная мощность, выделяемая на резисторах R_1 и r, $P_1 = I_1^2 R_1$. Когда ключ открыт (ток через диод не проходит), $I_2 = U/(R_0 + R_1 + r)$, а мощность $P_2 = I_2^2(R_1 + r)$. Так как по условию $P_1 = P_2$, получим:

$$U^2 \frac{R_1}{(R_0 + R_1)^2} = U^2 \frac{R_1 + r}{(R_0 + R_1 + r)^2}.$$

После преобразований приведём это выражение к квадратному уравнению относительно R_1:

$$R_1^2 + rR_1 - R_0^2 = 0, \qquad R_1 = \frac{1}{2}\left(-r \pm \sqrt{r^2 + 4R_0^2}\right).$$

Отрицательный корень уравнения не имеет физического смысла, поэтому $R_1 = 9$ Ом.

Условие

В архивах экспериментатора Глюка нашли график (рис. 6) изменения со временем проекции на вертикальную ось скорости шарика, который был выпущен из пневматического пистолета вертикально вверх с балкона 17-го этажа. Масштаб на оси скорости от времени выцвел, а на оси времени частично сохранился. Определите начальную скорость шарика и скорость, с которой шарик упал на землю. Ветра в день эксперимента не было.

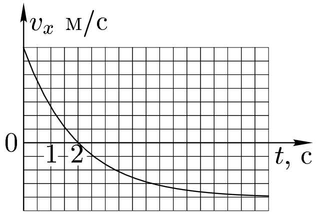

Рис. 6

Ориентировочная система оценивания

Определение масштаба оси скорости 6

Ответ 4

Возможное решение

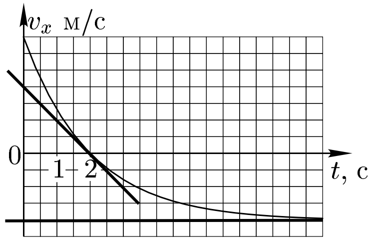

Рис. 7

Из графика видно, что на движение шарика сильно влияет сила сопротивления воздуха. Единственный момент, когда этого воздействия нет, наступает при $v_x = 0$, и при этом ускорение шарика равно ускорению свободного падения. Ускорение шарика $a = \Delta v/\Delta t$, то есть равно коэффициенту наклона графика в данной точке. Зная, что $g \approx 10$ м/с^2, определим масштаб на оси скорости (рис. 7):

$$a = 4\text{ дел.}/(2\text{ с}) = 10\text{ м/с}^2, \qquad 1\text{ дел.} = 5\text{ м/с}.$$

Теперь, когда известен масштаб, можем определить искомые значения начальной скорости $v_0 = 7$ дел. $= 35$ м/с и скорости, с которой шарик упал на землю, $v = 4$ дел. $= 20$ м/с.

Условие

Три одинаковые длинные «резинки», которые при растяжении подчиняются закону Гука, уложили параллельно друг другу и совместили концы, которые с одной стороны связали узлом. Два свободных конца взял в руки Вася, а третий свободный конец — Петя. Вася, держа концы резинок, бежит на север со скоростью 8 м/с, а Петя, держа свою резинку, бежит на восток со скоростью 9 м/с. В тот момент, когда резинки выпрямились и совсем немного растянулись, они расположились в направлении «восток–запад». С какой по модулю скоростью двигался в этот момент узел?

Ориентировочная система оценивания

Компонента скорости узла в направлении на север 3
Связь растяжений одной и двух резинок 2
Компонента скорости узла в направлении на восток 3
Полная скорость узла 2

Возможное решение

Обозначим скорость Васи через $v_{\text{В}}$, а скорость Пети — через v_{Π}. Разложим движение узла по двум направлениям: вдоль резинок и поперёк них, то есть спроецируем скорость узла на оси Ox (направлена на восток) и Oy (направлена на север).

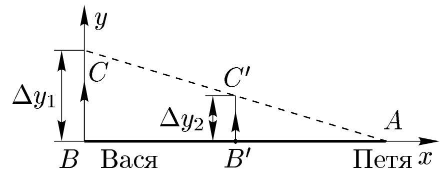

Рис. 8

Рассмотрим малый промежуток времени Δt. За это время Вася пробежит вдоль оси Oy расстояние $\Delta y_1 = v_{\text{В}}\Delta t$. Так как смещение Пети мало по сравнению с расстоянием AB, то им можно пренебречь. По условию $BB' = B'A$. Тогда из подобия треугольников ABC и $AB'C'$ (рис. 8) видно, что за то же самое время Δt узел сместится вдоль оси Oy на расстояние $\Delta y_2 = v_{\text{В}}\Delta t/2$. То есть проекция скорости узла на вертикальную ось равна $v_y = v_{\text{В}}/2 = 4$ м/с.

Вася держит в руке две резинки, которые можно считать одной с жёсткостью в два раза большей. Узел практически невесом, поэтому силы, с которыми на него действуют резинки, должны быть равны:

$$2k\Delta x_{\text{В}} = k\Delta x_{\Pi}, \tag{1}$$

где k — жёсткость одной резинки, $\Delta x_{\text{В}}$ и Δx_{Π} — удлинения резинок со стороны Васи и Пети соответственно. Сумма этих смещений за время Δt равна расстоянию, пробегаемому Петей, то есть $\Delta x_0 = v_{\Pi}\Delta t = \Delta x_{\text{В}} + \Delta x_{\Pi}/$ Из уравнения (1) получим, что $v_{\Pi}\Delta t = 3\Delta x_{\text{В}} = 3v_x\Delta t$, так как скорость узла вдоль оси Ox равна $v_x = \Delta x_{\text{В}}/\Delta t$. Отсюда получаем, что $v_x = (1/3)v_{\Pi} = 3$ м/с.

Значит, полная скорость узла по теореме Пифагора:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 \text{ м/с}.$$

Условие

Рис. 9

В установке (рис. 9) масса динамометра равна M, а массы грузов — m_1 и m_2. Коэффициент трения между динамометром и поверхностью стола μ. Участки AB и CD нити горизонтальны. Массами обеих нитей, блоков, а также пружинки можно пренебречь. Найдите показания динамометра, если они постоянны.

Ориентировочная система оценивания

Уравнения движения динамометра и грузов 4
Показания динамометра, когда он неподвижен 2
Показания динамометра, когда он движется влево 2
Показания динамометра, когда он движется вправо 2

Возможное решение

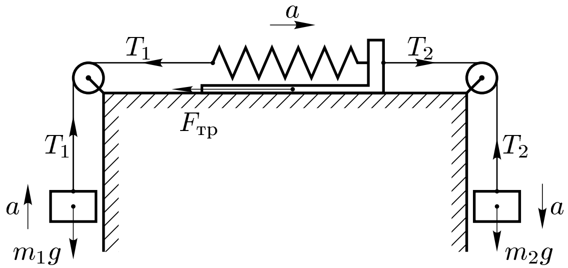

Рис. 10

Обозначим через a ускорение груза m_1, через T_1 — силу натяжения нити, привязанной к грузу m_1, а через T_2 — к грузу m_2 (рис. 10). Поскольку в процессе движения никакие силы не изменяются, то ускорения динамометра и второго груза по величине также равны a. Запишем уравнения движения для каждого из грузов и динамометра в общем случае. В проекции на вертикальную и горизонтальную ось:

$$m_1a = T_1 - m_1g, \tag{2}$$

$$m_2a = -T_2 + m_2g, \tag{3}$$

$$Ma = T_2 - F_{\text{тр}} - T_1, \tag{4}$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения, действующая на динамометр.

Найдём условие, при котором динамометр не проскальзывает. В этом случае $a = 0$, а условие выглядит как $|F_{\text{тр}}| \leqslant F_{\text{тр}\max} = \mu Mg$. Из предыдущей системы уравнений при $a = 0$ получаем, что $F_{\text{тр}} = T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)g$, и записанное условие примет вид:

$$-1 < \frac{m_2 - m_1}{\mu M} < 1.$$

В этом случае показания динамометра:

$$F = T_1 = m_1g.$$

Теперь рассмотрим случай, когда между столом и динамометром есть проскальзывание, то есть $|m_2 - m_1| > \mu M$. В этом случае $|F_{\text{тр}}| = \mu Mg$.

Пусть $m_2 > m_1 + \mu M$. Тогда сила трения направлена влево, и из уравнений (2), (3) и (4) получаем:

$$a = \frac{T_1}{m_1} - g, \qquad T_2 = 2m_2g - \frac{m_2}{m_1}T_1,$$

$$\frac{M}{m_1}T_1 - Mg = 2m_2g - \frac{m_2}{m_1}T_1 - T_1 - \mu Mg.$$

Из последнего уравнения системы получаем, что показания динамометра равны:

$$F = T_1 = \frac{M(1-\mu) + 2m_2}{m_1 + m_2 + M}m_1g.$$

Осталось рассмотреть случай, когда $m_2 < m_1 - \mu M$. Тогда сила трения направлена вправо, и из уравнений (2), (3) и (4), проводя аналогичные вычисления, получим:

$$F = T_1 = \frac{M(1+\mu) + 2m_2}{m_1 + m_2 + M} m_1 g.$$

Условие

Два стакана высотой $11H$ заполнены до уровня $9H$ водой и бензином соответственно (рис. 11). Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, а плотность бензина $\rho_Б = 0{,}72$ г/см^3. Сверху стаканы соединены заполненной водой тонкой трубочкой с краном. Открытые концы трубки погружены на $8H$ в каждую из жидкостей. Какие уровни установятся в стаканах, если кран открыть?

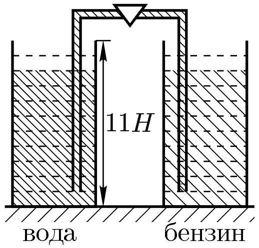

Рис. 11

Ориентировочная система оценивания

Условие равенства давлений на уровне концов трубки 5
Высота столба перетёкшей воды 2
Ответ 3

Возможное решение

Изначально давления у левого и правого концов трубки разные, и, так как плотность воды больше плотности бензина, вода начнёт переливаться по трубке в сосуд с бензином. Там вода будет опускаться на дно и достигнет некой высоты h. Предположим $h < H$. Тогда условие равенства давлений по обе стороны трубки:

$$p_1 = \rho_0 g(8H - h), \qquad p_2 = \rho_Б(8H + h), \qquad p_1 = p_2,$$

$$h = 8H\frac{\rho_0 - \rho_Б}{\rho_0 + \rho_Б} = 1\frac{13}{43}H > H.$$

Значит, наше предположение было неверным и вода поднимется выше конца трубки. В этом случае равенство давлений записывается следующим образом:

$$p_1 = \rho_0 g(8H - h), \qquad p_2 = \rho_Б g \cdot 9H + \rho_0 g(h - H), \qquad p_1 = p_2,$$

$$h = 9H\frac{\rho_0 - \rho_Б}{2\rho_0} = 1\frac{13}{50}H.$$

Видим, что $h < 2H$ и уровень бензина не поднимется до края стакана. Окончательно, уровни жидкости в сосуде с водой h_1 и в сосуде, в котором был бензин, h_2:

$$h_1 = 9H - h = 7\frac{37}{50}H, \qquad h_2 = 9H + h = 10\frac{13}{50}H.$$

Условие

Электрическая цепь (рис. 12) подключена к сети постоянного напряжения. При изменении сопротивления переменного резистора R, на нём выделяется мощность $P_0 = 16$ Вт при токе $I_1 = 1$ А и $I_2 = 4$ А. Определите наибольшую мощность $P_{\max}$, которая может выделяться на резисторе R.

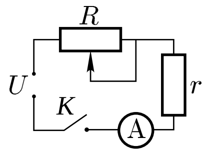

Рис. 12

Ориентировочная система оценивания

Зависимость мощности от тока в цепи 2
Значение мощности при $I = I_1$ или $I = I_2$ 4
Максимум мощности 4

Возможное решение

Запишем выражение для мощности, выделяющейся на резисторе R:

$$P = I(U - Ir) = UI - rI^2.$$

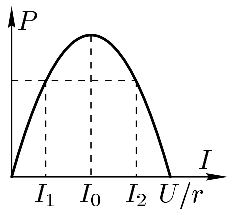

Рис. 13

Видно, что график $P(I)$ представляет собой параболу, проходящую через начало координат (рис. 13). Парабола симметрична относительно прямой, параллельной оси ординат, проходящей через её вершину. С одной стороны, абсцисса вершины равна $I_0 = U/(2r)$, с другой стороны, из симметрии ветвей параболы $I_0 = (I_1 + I_2)/2$. Таким образом, получим, что $U = (I_1 + I_2)r$. Воспользуемся этим выражением для мощности в первом или втором случае:

$$P_0 = (I_1 + I_2)rI_1 - rI_1^2 = I_1 I_2 r, \qquad r = \frac{P_0}{I_1 I_2}, \qquad U = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} P_0.$$

Теперь не составит труда определить ординату вершины:

$$P_{\max} = \frac{(I_1 + I_2)^2}{4 I_1 I_2} P_0 = 25 \text{ Вт}.$$

Условие

Идеальный одноатомный газ расширился в политропном процессе. При этом оказалось, что отношение совершённой газом работы к количеству подведённой к нему теплоты составило $\alpha = 2{,}5$. Вычислите молярную теплоёмкость C газа в этом процессе.

Примечание. Политропным называется процесс, протекающий с постоянной теплоёмкостью.

Ориентировочная система оценивания

Работа и подведённое тепло при приращении температуры 5

Ответ 5

Возможное решение

Поскольку теплоёмкость в процессе была постоянна, то подведённая теплота $Q = C\nu\Delta T$ и можно записать:

$$\alpha = \frac{A}{Q} = \frac{Q - \Delta U}{Q} = \frac{C\nu\Delta T - (3/2)\nu R\Delta T}{C\nu\Delta T} = \frac{C - 3R/2}{C}.$$

Тогда искомая теплоёмкость $C = \dfrac{3R/2}{1-\alpha} = -R$.

Условие

Над одноатомным идеальным газом производят сложный процесс, показанный на рисунке 14, который состоит из шести простых процессов. У точки 1 координаты (p, V, T), а у точки 4 — $(3p, 3V, 3T)$. График каждого из простых процессов параллелен одной из координатных осей.

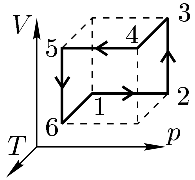

Рис. 14

1. Среди простых процессов найдите все изотермические.
2. Определите в них изменение внутренней энергии газа.
3. Найдите все процессы, изменение внутренней энергии которых $\Delta U = 0$.

Ориентировочная система оценивания

Изотермические процессы 2
Изменения энергии в них 4
Процессы, протекающие без изменения внутренней энергии 4

Возможное решение

Поскольку, величины p, V и T связаны уравнением состояния, то, следовательно, в сложном процессе меняется количество вещества.

1. В изотермических процессах $T = \text{const}$, то есть графики этих процессов параллельны плоскости pV. Таких процессов четыре: 1–2, 2–3, 4–5 и 5–6.

2. Внутренняя энергия одноатомного газа

$$U = \frac{3}{2}\nu RT = \frac{3}{2}pV. \tag{5}$$

Таким образом,

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(3pV - pV) = 3pV,$$
$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}(9pV - 3pV) = 9pV,$$
$$\Delta U_{45} = \frac{3}{2}(3pV - 9pV) = -9pV,$$
$$\Delta U_{56} = \frac{3}{2}(pV - 3pV) = -3pV.$$

3. Графики оставшихся процессов (3–4 и 6–1) параллельны оси T, а значит, они происходят при $p = \text{const}$ и $V = \text{const}$. По формуле (5) изменение внутренней энергии в этих процессах равно нулю, а изменение температуры компенсируется изменением числа молей.

Условие

На большом экране в Центре управления полётами отображается траектория Международной космической станции (МКС) — след от пересечения поверхности Земли прямой, проведённой от центра Земли к станции (рис. 15). Станция движется по круговой орбите.

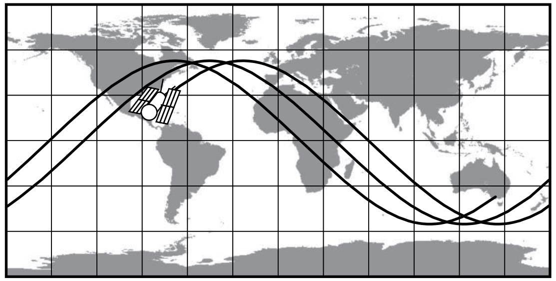

Рис. 15

Оцените с помощью данного рисунка высоту h космической станции над поверхностью Земли. Считайте, что радиус Земли равен $R = 6\ 380$ км, ускорение свободного падения на поверхности земли $g = 9{,}81$ м/с^2.

Ориентировочная система оценивания

Период обращения спутника, движущегося на уровне Земли 2
Период обращения станции 3
Применение третьего закона Кеплера и получение ответа 5

Возможное решение

Найдём период обращения спутника на уровне земли:

$$T_1 = \frac{2\pi R}{v_1} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5\ 070\ \text{с} = 1{,}41\ \text{ч},$$

где $v_1 = \sqrt{gR}$ — первая космическая скорость.

Определим период обращения МКС. Если бы Земля не вращалась, то станция пересекала бы экватор в одних и тех же точках. Но поскольку Земля вращается, она успевает повернуться за это время на некоторый угол и станция пролетает второй раз в точке, которая находится немного западнее (Земля вращается с запада на восток). Поэтому траектория станции немного смещается. За период обращения станции её смещение составляет 0,75 клетки. Но за $T_0 = 24$ часа Земля бы обернулась на один оборот и смещение составило бы 12 клеток. Значит, период станции $T = (0{,}75/12)T_0 = T_0/16 = 1{,}5$ ч.

Ускорение свободного падения на расстоянии R' от центра Земли составит $g' = g(R/R')^2$. Таким образом получим, что $g' \propto R'^{-2}$. Так как $T' = 2\pi\sqrt{R'/g'}$, то $T' \propto R'^{3/2}$. Следовательно, квадраты радиусов орбит относятся, как кубы периодов (это соотношение носит название третьего закона Кеплера).

Откуда найдём:

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{R+h}{R}\right)^3, \qquad h = \left(\left(\frac{T}{T_1}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) R \approx 280\ \text{км}.$$

Условие

Период малых колебаний системы (рис. 16) около положения равновесия равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, где m — масса каждого из шариков, а k — жёсткость пружины. Соединение лёгких стержней шарнирное и закреплено в точке O. Найдите длину L пружины в нерастянутом состоянии.

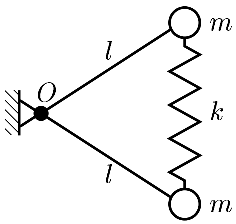

Рис. 16

Ориентировочная система оценивания

Выражение сжатия пружины через смещения шариков 1
Кинетическая энергия системы 3
Потенциальная энергия системы 3
Определение угла между стержнями 2
Ответ для L 1

Возможное решение

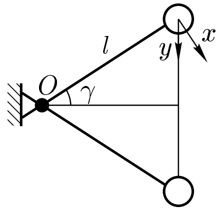

Рис. 17

Пусть в равновесии стержни составляют угол 2γ (рис. 17). Тогда при малом смещении шариков на x из положения равновесия, пружина сожмётся на $2y = 2x\cos\gamma$.

Кинетическая энергия системы:

$$K = \frac{\alpha\dot{x}^2}{2} = \frac{2m\dot{x}^2}{2},$$

где $\dot{x}$ — скорость шариков.

Потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{\beta x^2}{2} = \frac{4kx^2\cos^2\gamma}{2}.$$

Следовательно, период колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{4k\cos^2\gamma}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Откуда найдём $\cos\gamma = 1/\sqrt{2}$ и угол $\gamma = \pi/4$. Таким образом, искомая длина пружины $L = 2l\sin\gamma = l\sqrt{2}$.

Условие

Электрическая схема (рис. 18) состоит из источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, индуктивности L и сопротивления неизвестной величины.

Ключ K в схеме сначала замыкают, а затем размыкают в тот момент, когда скорость изменения энергии, запасённой индуктивностью, достигает максимума. Какое количество теплоты выделится в схеме после размыкания ключа?

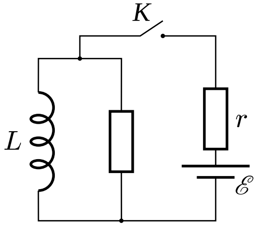

Рис. 18

Ориентировочная система оценивания

Выражение для тока через катушку 2
Скорость изменения энергии 3
Напряжение при максимальной скорости изменения энергии 3
Ответ 2

Возможное решение

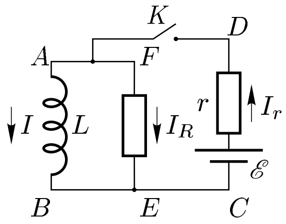

Рис. 19

Энергия, запасённая в катушке индуктивности, выражается как $W = LI^2/2$, где I — ток, текущий через катушку.

Дифференцируя выражение для энергии по времени, получим:

$$\frac{dW}{dt} = LI\frac{dI}{dt} = UI, \qquad (6)$$

где через U обозначена ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке.

Записывая второе правило Кирхгофа для контура $ABEF$, содержащего катушку индуктивности и неизвестный резистор сопротивлением R (рис. 19), получим, что сила тока, проходящего через резистор R, равна $I_R = U/R$.

Записывая второе правило Кирхгофа для внешнего контура $ABCD$, содержащего индуктивность и источник тока с известным сопротивлением, получаем, что $I_r = (\mathscr{E} - U)/r$, где I_r — сила тока, идущего через резистор r.

Тогда сила тока, идущего через катушку, равна

$$I = I_r - I_R = \frac{R\mathscr{E} - (R+r)U}{Rr}. \qquad (7)$$

Исследуем на максимум выражение (6):

$$\frac{dW}{dt} = UI = U\frac{\mathscr{E}}{r} - U^2\frac{R+r}{Rr}.$$

Это квадратный многочлен, представляющий из себя уравнение параболы, и dW/dt достигает максимума при

$$U = \frac{R}{2(R+r)}\mathscr{E}.$$

Подставляя это выражение в (7), получим, что сила тока, идущего через катушку в момент размыкания ключа равна $I_{\max} = \mathscr{E}/(2r)$, и в цепи выделится количество теплоты, равное:

$$Q = W_0 = \frac{L\mathscr{E}^2}{8r^2}.$$

Условие

В речке поймали карася и посадили в шарообразный аквариум радиуса R, а рядом поставили точно такой же аквариум с золотой рыбкой (рис. 20). Карасю такая соседка показалась необычной, и он начал с интересом разглядывать её, плавая в центре аквариума. Заметив наблюдение, золотая рыбка тоже замерла в центре аквариума и стала вглядываться в своего соседа.

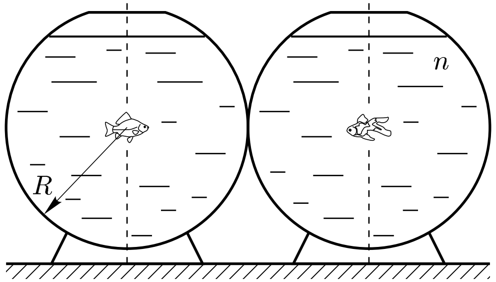

Рис. 20

1. На каком расстоянии с точки зрения карася плавает золотая рыбка, если показатель преломления воды в аквариумах равен $n = 4/3$?

2. Во сколько раз видимый поперечный размер золотой рыбки отличается от её истинного размера?

3. Прямое или перевёрнутое изображение соседки видит карась?

Примечание. Считайте, что размеры рыбок много меньше R.

Ориентировочная система оценивания

Фокусное расстояние воздушной линзы	4
Расстояние от карася до изображения рыбки	2
Увеличение изображения рыбки	2
Ответ на третий вопрос	2

Возможное решение

Так как карась (К) плавает в воде, то он смотрит на золотую рыбку (ЗР) через линзу из воздуха, оптическая сила которой равна:

$$D = (n_{12} - 1)\left(-\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\right) = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\left(-\frac{2}{R}\right) = \frac{1}{2R}.$$

Запишем формулу тонкой линзы, связав тем самым положение рыбки с положением её изображения в линзе:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2R},$$

где x_1 — расстояние от линзы до изображения рыбки, отсчитываемое вдоль оси x (рис. 21). Тогда $x_1 = -2R$, что говорит о том, что изображение рыбки будет мнимым и расстояние до него от карася равно $r = R - x_1 = 3R$.

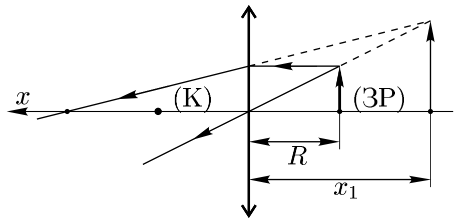

Рис. 21

Увеличение, даваемое линзой, равно $\Gamma = |x_1/R| = 2$. Карась увидит прямое увеличенное изображение рыбки.