Районный тур 2010. 11 класс. I вариант

Задача 1. I вариант

Рассмотрим движение по необработанной поверхности. По закону сохранения энергии кинетическая энергия камня $mV^2/2$ переходит в работу силы трения $\mu mgL'$, т.е. по необработанной дорожке камень пройдет расстояние

$$L' = \frac{V^2}{2\mu g} \simeq 11.5 \text{ м.}$$

Поскольку $L' > L$, x метров дорожки надо поцарапать.

При движении по дорожке, часть которой поцарапана, закон сохранения имеет вид

$$\frac{V^2}{2} = g\mu(L-x) + ag\mu x,$$

где коэффициент $a = 2$ показывает, что на поцарапанной части μ увеличилось в два раза. Отсюда

$$x = \frac{V^2}{2g\mu(a-1)} - \frac{L}{a-1} \simeq 1.5 \text{ м.}$$

Решение существует при $0 \leq x \leq L$. Если скорость камня при этом максимально возможная, следует поцарапать всю дорожку, т.е. подставить в предыдущую формулу $x = L$, $a = 2$. Если же скорость минимально возможная, всю дорожку надо отполировать, при этом $x = L$, $a = 1/2$. Отсюда

$$V \geq \sqrt{2ga_{min}\mu L} \simeq 2 \text{ м/с}, \qquad V \leq \sqrt{2ga_{max}\mu L} \simeq 4 \text{ м/с.}$$

Ответ: Нужно поцарапать 1.5 метра дорожки, решение существует, если $2 \leq V \leq 4$ м/с.

Задача 2. I вариант

Если $T_0 < T$, кастрюлю надо охлаждать. Сделать это можно, например, с помощью холодильной машины.

Как известно, наибольшую эффективность имеет машина, работающая по циклу Карно. При этом роль нагревателя (отдающего ежесекундно теплоту Q_H) играет кастрюля, а роль холодильника (принимает ежесекундно теплоту Q_X) – комната.

По первому началу термодинамики затраченная в секунду работа определяется соотношением $A = Q_X - Q_H$, эффективность холодильника определяется как

$$\xi = \frac{Q_H}{A} = \frac{T_0}{T - T_0},$$

вторая часть равенства справедлива для цикла Карно (температуры записываются в градусах Кельвина).

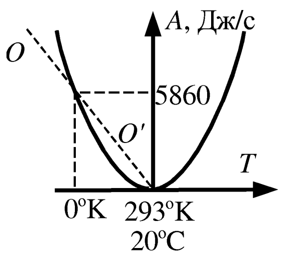

Рис. 1:

Мощность отдаваемого кастрюлей тепла $Q_H = \xi A$ должна компенсировать нагрев кастрюли со стороны комнаты, имеющий мощность P. Тогда

$$A(T) = \frac{P}{\xi} = \frac{\alpha(T-T_0)^2}{T_0}, \qquad T > T_0.$$

Полученной формуле соответствует график в виде ветви параболы.

Если же температура кастрюли $T_0 > T$, то кастрюлю надо нагревать. Организуем для этого тепловой насос на основе цикла Карно. При этом роль нагревателя (отдающего ежесекундно теплоту Q_H) играет комната, а роль холодильника (принимает ежесекундно теплоту

Q_X) – кастрюля. По первому началу термодинамики затраченная в секунду работа определяется соотношением $A = Q_X - Q_H$, эффективность теплового насоса определяется как

$$\xi' = \frac{Q_X}{A} = \frac{T_0}{T_0 - T},$$

вторая часть равенства справедлива для цикла Карно.

Мощность получаемого кастрюлей тепла $Q_X = \xi' A$ должна компенсировать ее остывание, имеющее мощность P. Тогда

$$A(T) = \frac{P}{\xi'} = \frac{\alpha(T - T_0)^2}{T_0}, \qquad T < T_0.$$

Полученной формуле соответствует график в виде второй ветви параболы.

Казалось бы, ответ получен. Однако можно нагревать кисель иным способом, например, активно его перемешивая. Очевидно, это необратимый процесс. Затрачиваемая при этом за секунду работа будет покрывать мощность теплопотерь, т.е.

$$A(T) = P = \alpha|T_0 - T|,$$

и соответствующий график – прямая (OO').

Так какой из предложенных способов нагревания кастрюли обеспечивается наименьшей работой? Очевидно, ветвь параболы, полученная при нагревании тепловым насосов и прямая, соответствующая перемешиванию, должны пересечься. Вычислив температуру, при которой это происходит, убеждаемся, что точке пересечения соответствует 0^o K. Значит, при любой физической ($T > 0^o$ K) температуре более выгодным окажется метод нагревания тепловым насосом. Этот факт является отражением фундаментальной *теоремы о минимальной работе*, которая утверждает, что минимальная работа достигается именно в *обратимых процессах.*

Ответ: Требуемый график изображен на рис. 1

Задача 3. I вариант

В момент времени t машина находится на расстоянии Vt от зеркала. Зеркало создает изображение источника света на расстоянии $2Vt$ от машины. Источник (и, следовательно, изображение) светит во все стороны одинаково. На расстоянии $2Vt$ от изображения мощность света равномерно распределится по площади сферы радиуса $2Vt$, поэтому на детектор попадает мощность света

$$P' = \frac{PS}{16\pi(Vt)^2} \qquad <=> \qquad \frac{P'}{P_0} = \frac{PS}{16\pi(Vt)^2 P_0} = \frac{PS}{16\pi(Vt_0)^2 P_0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2.$$

Прологарифмируем последнее выражение. График в дважды-логарифмическом масштабе изображает функцию

$$\ln(P'/P_0) = \ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2} - 2\ln(t/t_0).$$

Отметим, что корректно логарифмировать именно безразмерные величины t/t_0 и P'/P_0.

Значит, зависимость $y = \ln(P'/P_0)$ от $x = \ln(t/t_0)$ является линейной,

$$y = k - 2x, \qquad k \equiv \ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2}$$

коэффициент k определяет точку пересечения этой прямой с осью ординат.

Теперь по графику легко восстановить скорость. Он пересекает ось ординат в точке -1, значит

$$\ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2} = -1.$$

Отсюда искомая скорость

$$V = \sqrt{\frac{PSe}{16\pi P_0 t_0^2}} =\simeq 0.75 \text{ м/с} \simeq 2.7 \text{ км/ч},$$

где $e \simeq 2.71828$ – основание натурального логарифма.

Заметьте, ответ имеет правильную размерность.

Ответ: Искомая скорость V =0.75 м/с=2.7 км/ч.

Задача 4. I вариант

Сила натяжения нити и сила Лоренца перпендикулярны скорости тела, поэтому они не совершают работы, и модуль скорости тела не меняется.

Пока нить натянута, тело в каждый момент движется по окружности с центром в точке A, где нить отходит от цилиндра. Радиус этой окружности растет по мере того, как разматывается нить.

Однако, если этот радиус достигнет циклотронного, т.е. сравняется с радиусом свободного движения частицы в магнитном поле, нить провиснет и перестанет влиять на заряд.

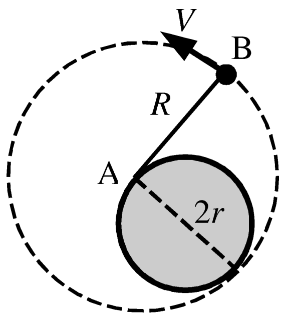

Рис. 2:

Натяжение нити обращается в ноль, когда

$$\frac{mV^2}{R} = qVB,$$

длина размотаной нити AB в этот момент равна

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

Далее тело летит под действием лишь силы Лоренца по окружности неизменного радиуса R. Из геометрии задачи следует $R = 2r$ (см. рис.), отсюда легко найти ответ.

Ответ: $V = 2rqB/m$.

Задача 5. I вариант

Пусть сначала $d << r$, $d << D$. Рассмотрим силу, действующую на точечный единичный заряд, расположенный на оси трубы на расстоянии x от ее края. Ее величину – напряженность – обозначим через $E(x)$.

Тогда сила, действующая на диполь

$$F = q[E(D) - E(D + d)]. \tag{1}$$

Но точно такая же сила действовала бы на заряд q со стороны двух труб: заряженной до плотности заряда σ, расположенной на расстоянии D, и заряженной до $-\sigma$ на расстоянии $D + d$. Заметьте: вместо того, чтобы рассматривать силу, действующую на диполь (*два* разноименных заряда) со стороны *одной* трубы, мы стали рассматривать *один* заряд q, но *две* противоположно заряженные трубы!

Две противоположно заряженные трубы, сдвинутые друг относительно друга по оси, создают такое же поле, как кольцо шириной d (см. рис. 3, кольцо заштриховано). Заряд кольца $Q = 2\pi r d\sigma$.

Так как d мало, элемент кольца Δq воздействует на заряд q с силой

$$\Delta F = \frac{kq\Delta q}{r^2 + D^2},$$

проекция этой силы на ось трубы дает $\Delta F D/\sqrt{r^2 + D^2}$.

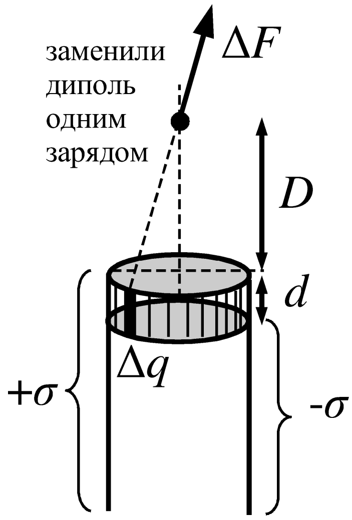

Рис. 3:

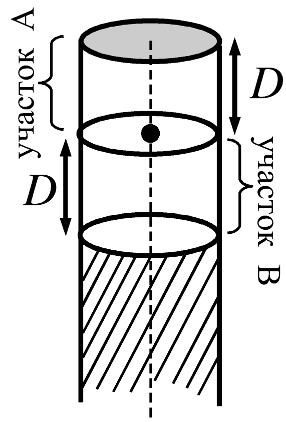

Рис. 4:

Кольцо тонкое, все его элементы находятся на одинаковом расстоянии от заряда q. Векторное суммирование сил от всех элементов дает ответ

$$F = \frac{kqQD}{(D^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi r d k\sigma q D}{(D^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Диполь может быть расположен и внутри трубы. Если он по-прежнему далеко от торца, из симетрии задачи очевидно, что сила от участка А трубы уравновешивается силой со стороны участка трубы В (см. рис. 4). Поэтому нескомпенсированный вклад в силу F дает лишь заштрихованная часть трубы. Задача свелась к ранее решенной, ответ по-прежнему дается формулой (2).

Решение задачи, очевидно, усложняется, если диполь оказывается вблизи края трубы (d сравнимо с D). Проблемы наблюдаются при нашей замене диполя на заряд, а трубы на кольцо: окажется что ширина кольца сравнима с расстоянием от центра кольца до заряда, и разбивание кольца на элементы станет некорректным, ведь теперь элементы располагаются от заряда на разных расстояниях.

В этом случае имеет смысл решить задачу более точно.

Рассмотрим одиночный заряд q на оси трубы на расстоянии D от среза. Сдвинем его на бесконечно малое расстояние d' вдоль оси и будем интересоваться разностью потенциалов в этих точках

$$\Delta\Phi = \Phi(D + d') - \Phi(D). \tag{3}$$

Рассуждая как вначале задачи, заметим, что потенциал, численно равный *разности* (3) создает система двух сдвинутых на d' разноименно заряженных труб, которые снова можно заменить на кольцо.

Итак, разность потенциалов между этими точками равна потенциалу, созданному очень тонким кольцом (ширины d') радиуса r с плотностью заряда σ на расстоянии D от центра:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi r d' k\sigma}{\sqrt{D^2 + r^2}}.$$

С другой стороны, эта разность потенциалов равна Ed' (очевидно, вектор E направлен по оси трубы). Поэтому напряженность поля полубесконечной трубы на расстоянии D от края (на оси) есть

$$E(D) = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{D^2+r^2}}.$$

Сила, действующая на диполь, тем самым равна по ф-ле (1)

$$F = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{D^2+r^2}} - \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{(D+d)^2+r^2}}. \qquad (4)$$

При $d << D$ ф-лы (4) и (2) совпадают:

$$F = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{(D^2+r^2)((D+d)^2+r^2)}}(\sqrt{(D+d)^2+r^2} - \sqrt{D^2+r^2}) \approx \frac{2\pi rdk\sigma qD}{(D^2+r^2)^{3/2}}.$$

Ответ: Диполь отталкивается, точный ответ дается ф-лой (4). При $d << D$ она имеет вид (2).

Районный тур 2009. 11 класс. II вариант

Задача 1. II вариант

Рассмотрим движение по необработанной поверхности. По закону сохранения энергии кинетическая энергия камня $mV^2/2$ переходит в работу силы трения $\mu mgL'$, т.е. по необработанной дорожке камень пройдет расстояние

$$L' = \frac{V^2}{2\mu g} \simeq 7.7 \text{ м.}$$

Поскольку $L' > L$, x метров дорожки надо отполировать.

При движении по дорожке, часть которой отполирована, закон сохранения имеет вид

$$\frac{V^2}{2} = g\mu(L - x) + ag\mu x,$$

где коэффициент $a = 1/3$ показывает, что на полированой части μ уменьшилось в три раза. Отсюда

$$x = \frac{V^2}{2g\mu(a-1)} - \frac{L}{a-1} \simeq 3.5 \text{ м.}$$

Решение существует при $0 \le x \le L$. Если скорость камня при этом максимально возможная, следует поцарапать всю дорожку, т.е. подставить в предыдущую формулу $x = L$, $a = 3$. Если же скорость минимально возможная, всю дорожку надо отполировать, при этом $x = L$, $a = 1/3$. Отсюда

$$V \ge \sqrt{2ga_{min}\mu L} \simeq 2 \text{ м/с}, \qquad V \le \sqrt{2ga_{max}\mu L} \simeq 5.9 \text{ м/с}.$$

Ответ: Нужно отполировать 3.5 метра дорожки, скорость камня $2 \le V \le 5.9$ м/с.

Задача 2. II вариант

Если $T_0 < T$, кастрюлю надо охлаждать. Сделать это можно, например, с помощью холодильной машины.

Как известно, наибольшую эффективность имеет машина, работающая по циклу Карно. При этом роль нагревателя (отдающего ежесекундно теплоту Q_H) играет кастрюля, а роль холодильника (принимает ежесекундно теплоту Q_X) – комната.

По первому началу термодинамики затраченная в секунду работа определяется соотношением $A = Q_X - Q_H$, эффективность холодильника определяется как

$$\xi = \frac{Q_H}{A} = \frac{T_0}{T - T_0},$$

вторая часть равенства справедлива для цикла Карно (температуры записываются в градусах Кельвина).

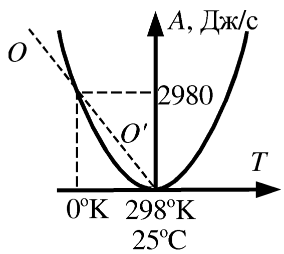

Рис. 1:

Мощность отдаваемого кастрюлей тепла $Q_H = \xi A$ должна компенсировать нагрев кастрюли со стороны комнаты, имеющий мощность P. Тогда

$$A(T) = \frac{P}{\xi} = \frac{\alpha(T - T_0)^2}{T_0}, \qquad T > T_0.$$

Полученной формуле соответствует график в виде ветви параболы.

Если же температура кастрюли $T_0 > T$, то кастрюлю надо нагревать. Организуем для этого тепловой насос на основе цикла Карно. При этом роль нагревателя (отдающего ежесекундно теплоту Q_H) играет комната, а роль холодильника (принимает ежесекундно теплоту

Q_X) – кастрюля. По первому началу термодинамики затраченная в секунду работа определяется соотношением $A = Q_X - Q_H$, эффективность теплового насоса определяется как

$$\xi' = \frac{Q_X}{A} = \frac{T_0}{T_0 - T},$$

вторая часть равенства справедлива для цикла Карно.

Мощность получаемого кастрюлей тепла $Q_X = \xi' A$ должна компенсировать ее остывание, имеющее мощность P. Тогда

$$A(T) = \frac{P}{\xi'} = \frac{\alpha(T - T_0)^2}{T_0}, \qquad T < T_0.$$

Полученной формуле соответствует график в виде второй ветви параболы.

Казалось бы, ответ получен. Однако можно нагревать кисель иным способом, например, активно его перемешивая. Очевидно, это необратимый процесс. Затрачиваемая при этом за секунду работа будет покрывать мощность теплопотерь, т.е.

$$A(T) = P = \alpha|T_0 - T|,$$

и соответствующий график – прямая (OO').

Так какой из предложенных способов нагревания кастрюли обеспечивается наименьшей работой? Очевидно, ветвь параболы, полученная при нагревании тепловым насосов и прямая, соответствующая перемешиванию, должны пересечься. Вычислив температуру, при которой это происходит, убеждаемся, что точке пересечения соответствует 0^o K. Значит, при любой физической ($T > 0^o$ K) температуре более выгодным окажется метод нагревания тепловым насосом. Этот факт является отражением фундаментальной *теоремы о минимальной работе*, которая утверждает, что минимальная работа достигается именно в *обратимых процессах*.

<u>Ответ:</u> Требуемый график изображен на рис. 1

Задача 3. II вариант

В момент времени t машина находится на расстоянии Vt от зеркала. Зеркало создает изображение источника света на расстоянии $2Vt$ от машины. Источник (и, следовательно, изображение) светит во все стороны одинаково. На расстоянии $2Vt$ от изображения мощность света равномерно распределится по площади сферы радиуса $2Vt$, поэтому на детектор попадает мощность света

$$P' = \frac{PS}{16\pi(Vt)^2} \qquad <=> \qquad \frac{P'}{P_0} = \frac{PS}{16\pi(Vt)^2 P_0} = \frac{PS}{16\pi(Vt_0)^2 P_0}\left(\frac{t_0}{t}\right)^2.$$

Прологарифмируем последнее выражение. График в дважды-логарифмическом масштабе изображает функцию

$$\ln(P'/P_0) = \ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2} - 2\ln(t/t_0).$$

Отметим, что корректно логарифмировать именно безразмерные величины t/t_0 и P'/P_0.

Значит, зависимость $y = \ln(P'/P_0)$ от $x = \ln(t/t_0)$ является линейной,

$$y = k - 2x, \qquad k \equiv \ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2}$$

коэффициент k определяет точку пересечения этой прямой с осью ординат.

Теперь по графику легко восстановить скорость. Он пересекает ось ординат в точке -1, значит

$$\ln\frac{PS}{16\pi P_0 V^2 t_0^2} = -2.$$

Отсюда искомая скорость

$$V = \sqrt{\frac{PSe^2}{16\pi P_0 t_0^2}} =\simeq 1.25 \text{ м/с} \simeq 4.5 \text{ км/ч},$$

где $e \simeq 2.71828$ – основание натурального логарифма.

Заметьте, ответ имеет правильную размерность.

Ответ: Искомая скорость V =1.25 м/с=4.5 км/ч.

Задача 4. II вариант

Сила натяжения нити и сила Лоренца перпендикулярны скорости тела, поэтому они не совершают работы, и модуль скорости тела не меняется.

Пока нить натянута, тело в каждый момент движется по окружности с центром в точке А, где нить отходит от цилиндра. Радиус этой окружности растет по мере того, как разматывается нить.

Однако, если этот радиус достигнет циклотронного, т.е. сравняется с радиусом свободного движения частицы в магнитном поле, нить провиснет и перестанет влиять на заряд.

Натяжение нити обращается в ноль, когда

$$\frac{mV^2}{R} = qVB,$$

длина размотаной нити АВ в этот момент равна

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

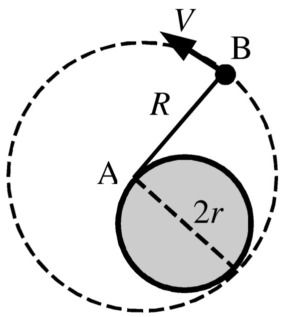

Рис. 2:

Далее тело летит под действием лишь силы Лоренца по окружности неизменного радиуса R. Из геометрии задачи следует $R = 2r$ (см. рис.), отсюда легко найти ответ.

Ответ: $q = mV/(2rqB)$.

Задача 5. II вариант

Пусть сначала $d << r$, $d << D$. Рассмотрим силу, действующую на точечный единичный заряд, расположенный на оси трубы на расстоянии x от ее края. Ее величину – напряженность – обозначим через $E(x)$.

Тогда сила, действующая на диполь равна по модулю

$$|F| = q[E(D) - E(D + d)]. \quad (1)$$

Но точно такая же сила действовала бы на заряд $-q$ со стороны двух труб: заряженной до плотности заряда σ, расположенной на расстоянии D, и заряженной до $-\sigma$ на расстоянии $D + d$. Заметьте: вместо того, чтобы рассматривать силу, действующую на диполь (*два* разноименных заряда) со стороны *одной* трубы, мы стали рассматривать *один* заряд $-q$, но *две* противоположно заряженные трубы!

Две противоположно заряженные трубы, сдвинутые друг относительно друга по оси, создают такое же поле, как кольцо шириной d (см. рис. 3, кольцо заштриховано). Заряд кольца $Q = 2\pi r d\sigma$.

Так как d мало, элемент кольца Δq воздействует на заряд $-q$ с силой

$$|\Delta F| = \frac{kq\Delta q}{r^2 + D^2},$$

проекция этой силы на ось трубы дает $\Delta FD/\sqrt{r^2 + D^2}$.

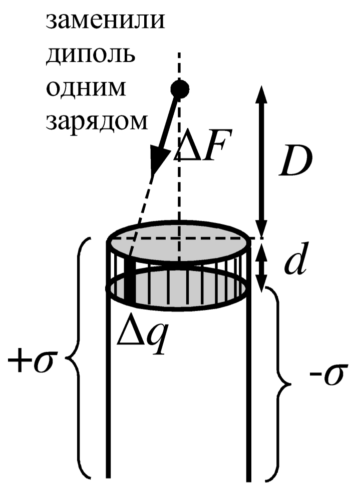

Рис. 3:

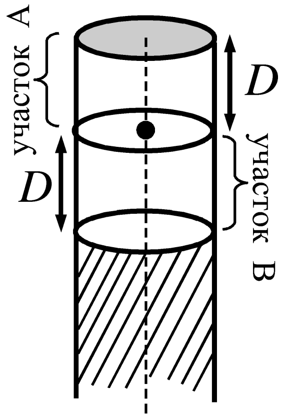

Рис. 4:

Кольцо тонкое, все его элементы находятся на одинаковом расстоянии от заряда q. Векторное суммирование сил от всех элементов дает ответ

$$|F| = \frac{kqQD}{(D^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi r d k \sigma q D}{(D^2 + r^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Диполь может быть расположен и внутри трубы. Если он по-прежнему далеко от торца, из симетрии задачи очевидно, что сила от участка А трубы уравновешивается силой со стороны участка трубы В (см. рис. 4). Поэтому нескомпенсированный вклад в силу F дает лишь заштрихованная часть трубы. Задача свелась к ранее решенной, ответ по-прежнему дается формулой (2).

Решение задачи, очевидно, усложняется, если диполь оказывается вблизи края трубы (d сравнимо с D). Проблемы наблюдаются при нашей замене диполя на заряд, а трубы на кольцо: окажется что ширина кольца сравнима с расстоянием от центра кольца до заряда, и разбивание кольца на элементы станет некорректным, ведь теперь элементы располагаются от заряда на разных расстояниях.

В этом случае имеет смысл решить задачу более точно.

Рассмотрим одиночный заряд q на оси трубы на расстоянии D от среза. Сдвинем его на бесконечно малое расстояние d' вдоль оси и будем интересоваться разностью потенциалов в этих точках

$$\Delta\Phi = \Phi(D + d') - \Phi(D). \tag{3}$$

Рассуждая как вначале задачи, заметим, что потенциал, численно равный *разности* (3) создает система двух сдвинутых на d' разноименно заряженных труб, которые снова можно заменить на кольцо.

Итак, разность потенциалов между этими точками равна потенциалу, созданному очень тонким кольцом (ширины d') радиуса r с плотностью заряда σ на расстоянии D от центра:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi r d' k \sigma}{\sqrt{D^2 + r^2}}.$$

С другой стороны, эта разность потенциалов равна Ed' (очевидно, вектор E направлен по оси трубы). Поэтому напряженность поля полубесконечной трубы на расстоянии D от края (на оси) есть

$$E(D) = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{D^2 + r^2}}.$$

Сила, действующая на диполь, тем самым равна по ф-ле (1)

$$|F| = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{D^2 + r^2}} - \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{(D+d)^2 + r^2}}. \tag{4}$$

При $d << D$ ф-лы (4) и (2) совпадают:

$$|F| = \frac{2\pi rk\sigma}{\sqrt{(D^2 + r^2)((D+d)^2 + r^2)}}(\sqrt{(D+d)^2 + r^2} - \sqrt{D^2 + r^2}) \approx \frac{2\pi rdk\sigma qD}{(D^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Ответ: Диполь притягивается, точный ответ дается ф-лой (4). При $d << D$ она имеет вид (2).