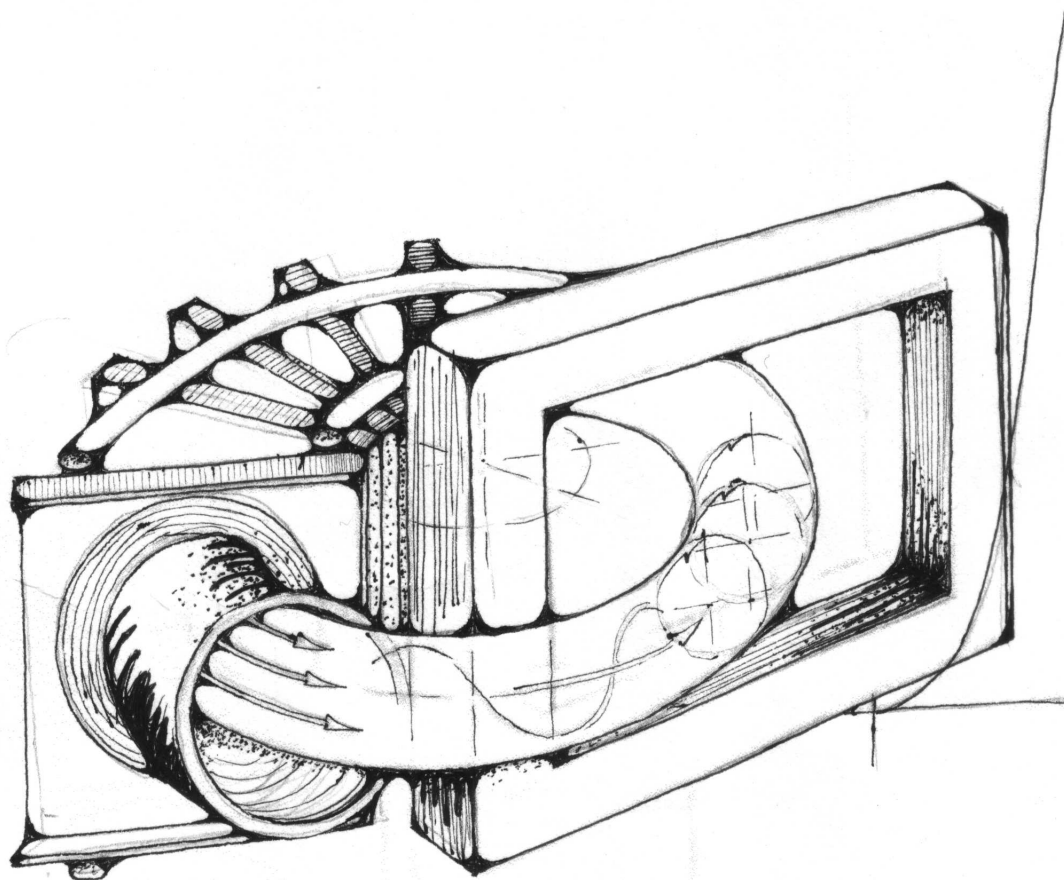


Задачи и решения
городской олимпиады по физике

Городской этап, 2009 год, 9-11 класс



Авторский коллектив:

Коваль Д., Комарова М., Куликов А., Малышев А., Налимов М., Сафронов П., Тертеров И., Чепель В.

Составитель:

Доктор физико-математических наук
профессор физического факультета СПбГУ Налимов М.Ю.

Редакция:

Кандидат физико-математических наук Комарова М.В.

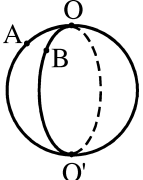
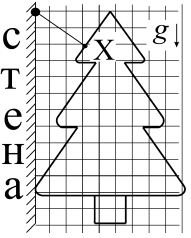
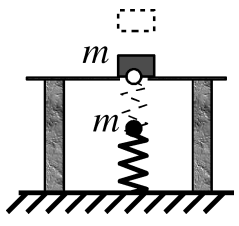
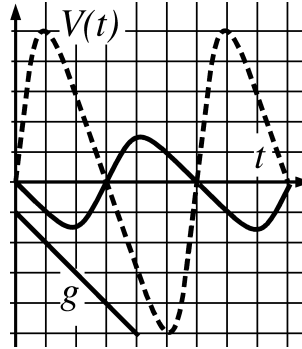
Рецензент:

Кандидат физико-математических наук Компаниец М.В.

Задачи и решения Санкт-Петербургской городской олимпиады
школьников по физике 2009 г.

Отпечатано в РИС ГОУ "СПбГДТЮ"

Заказ № _____, тираж _____ экз., подписано в печать _____.

1	<p>Два одинаковых проводящих проволочных кольца радиуса a сварили в противоположных точках O и O' как указано на рисунке. Сопротивление единицы длины проволоки равно λ. Дуги AO и BO равны, их длина l. Найти зависимость сопротивления между точками A и B от величины l.</p>	
2	<p>Петя на уроке труда выпилил под Новый Год из фанеры елочку. Чтобы повесить ее на скользкую стенку, он забил гвоздь на уровне, где хотел разместить вершину елочки. За какую точку X, расположенную на краю елочки, ему нужно прикрепить нить, чтобы елочка висела ровно (не перекашивалась)? Трения между стенкой и краем елочки нет. Елочка симметричная, она не касается пола и может двигаться лишь в плоскости рисунка.</p>	
3	<p>Экспериментатор Вася исследует скорость таяния снега. При температуре 0°C в сильный снегопад он кладет большой плоский нагреватель на землю и записывает, с какой скоростью меняется высота сугроба на нагревателе. Нагреватель рассчитан на 4 возможные мощности: $P_1 = 0.25$ Вт, $P_2 = 0.5$ Вт, $P_3 = 1$ Вт и $P_4 = 2$ Вт. Из-за небрежности Вася записывает только абсолютное значение скорости без указания, опускался или поднимался уровень снега. Его данные для соответствующих мощностей нагревателя: $v_1 = 2.25$ мм/с, $v_2 = 1$ мм/с, $v_3 = 1.5$ мм/с. Помогите ему найти v_4. Определите также скорость выпадания снега на нагреватель в кг/с, если удельная теплота плавления льда $\lambda = 3.35 \cdot 10^5$ Дж/кг. Нагреватель установлен так, что растаявший снег сразу стекает с него, потерями тепла пренебречь.</p>	
4	<p>Маленький шарик массы m, закрепленный на вертикальной пружине расположили под столом с отверстием, в положении равновесия шарик находится посередине отверстия. Обнаружилось, что если шарик отклонить вниз на произвольное расстояние и отпустить, он колеблется вокруг положения равновесия с периодом T_0. Над отверстием поставили тело массой m (см. рис.) и снова вывели шарик из положения равновесия. Определить период колебаний системы, если известно, что максимальная скорость шарика v_m. Шарик и тело соударяются абсолютно упруго; тело, подскакивая, движется строго вертикально. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения g.</p>	
5	<p>Дракон Смог завис над лучником Бэрдом, при этом центр масс тела дракона (без крыльев) и центр масс его крыльев двигаются по вертикали. На рисунке изображены соответствующие графики вертикальной скорости $V(t)$ для центра масс тела (сплошной линией) и центра масс крыльев (пунктирной линией). Также представлен график для тела, падающего вертикально с ускорением g (наклонная линия с углом 45°). Вертикальная составляющая силы взаимодействия крыла дракона (тела дракона) с воздухом пропорциональна вертикальной скорости центра масс крыла (тела). Найдите отношение массы тела к массе крыльев дракона.</p>	

9 класс. Задача 1

Обозначим сопротивление полуокружности через $R = \lambda\pi a$, сопротивление участка дуги длиной l – через $r = \lambda l$.

Нарисуем эквивалентную схему (см. рис. 1).

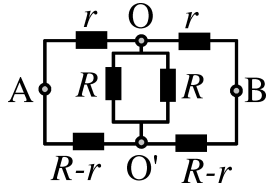


Рис. 1.

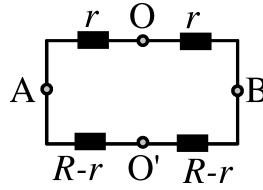


Рис. 2.

Так как точки O и O' лежат на оси симметрии схемы, потенциал в них одинаковый, и ток по параллельным сопротивлениям R течь не будет. Это позволяет перерисовать схему в более удобном виде (см. рис. 2). Теперь нетрудно вычислить ее полное сопротивление

$$R_{AB} = \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(R-r)} \right)^{-1} = \frac{2r(R-r)}{R} = \frac{2\lambda l(\pi a - l)}{\pi a}.$$

Ответ: $R_{AB} = 2\lambda l(\pi a - l)/(\pi a)$.

9 класс. Задача 2.

Изобразим силы, действующие на конструкцию (см. рис. 3). Сила тяжести приложена к центру масс, расположенному где-то на линии симметрии елки. Линия действия нормальной реакции опоры \vec{N} – перпендикулярная ей прямая, проходящая через точку касания стенки елочкой. Сила натяжения нити приложена к точке X елочки.

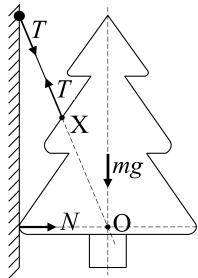


Рис. 3.

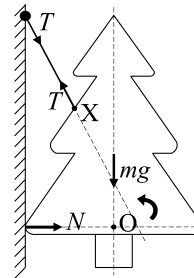


Рис. 4.

Если линия действия силы натяжения нити T не проходит через точку O, в которой пересекаются $m\vec{g}$ и \vec{N} , то возникает вращающий момент относительно точки O. Например, в случае, изображенном на рис. 4, елку перекосит против часовой стрелке).

Значит, нужно подвесить елочку за точку, где прямая, соединяющая гвоздик и точку O, пересекает край елочки.

Ответ: см. рисунок 3.

9 класс. Задача 3.

Обозначим скорость выпадания снега $\eta = \Delta m/\Delta t$. Чтобы растопить массу снега Δm , необходимо ему передать тепло $\Delta Q = \lambda\Delta m$. Отсюда мощность, требуемая для растопления всего падающего снега, есть

$$P_0 = \Delta Q/\Delta t = \lambda\eta.$$

Если же мощность нагревателя отличается от P_0 , то над нагревателем будет расти или убывать слой снега в зависимости от соотношения мощности нагревателя и $\lambda\eta$.

Условно выберем положительный знак скорости, если уровень снега поднимается. Тогда

$$v \sim \lambda\eta - P, \tag{1}$$

где P - мощность нагревателя. Отсюда ясно, что график скорости $v(P)$ представляет собой прямую линию с отрицательным наклоном. Так как исходные точки не лежат на одной прямой (см. рис. 5), то с какого-то момента уровень снега стал опускаться и необходимо поменять знаки у всех скоростей для точек начиная

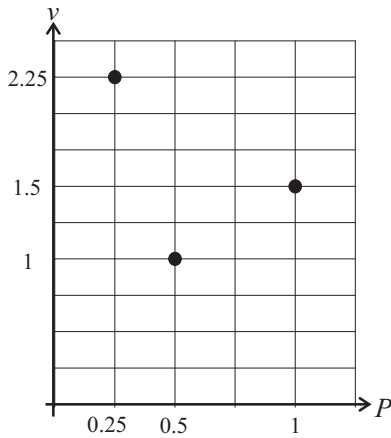


Рис. 5.

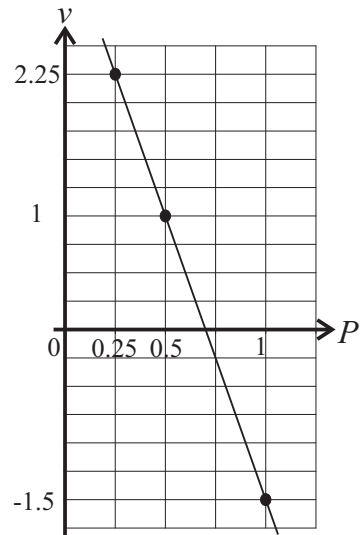


Рис. 6.

с этого момента. Простым перебором убеждаемся, что такая точка единственна и соответствует мощности P_3 .

Теперь можно построить прямую $v(P)$ (см. рис. 6) и найти $v_4 = v(P_4)$ из графика. Скорость окажется равной $v_4 = -6.5$ мм/с. Наконец, скорость выпадания снега η найдем из точки пересечения графиком оси абсцисс, где мощность равна 0.7 Вт. В самом деле, из формулы (1) следует, что точка пересечения с осью абсцисс есть $P_0 = \lambda\eta$. Отсюда $\eta = P_0/\lambda = 0.7/(3.35 \cdot 10^5) = 2.1 \cdot 10^{-6}$ кг/с.

Ответ: $v_4 = -6.5$ мм/с, при этом уровень снега опускался. Скорость выпадания снега $\eta = 2.1 \cdot 10^{-6}$ кг/с.

9 класс. Задача 4.

При абсолютно упругом ударе шарика о тело вся кинетическая энергия шарика перейдет телу, так как их массы равны. Действительно, это видно из законов сохранения импульса и энергии

$$mv = mv_1 + mv_2, \quad mv^2/2 = mv_1^2/2 + mv_2^2/2,$$

где v - скорость шарика до удара, а v_1 и v_2 - скорости шарика и тела после соударения. Несложно видеть, что из них получаются соотношения $v_2 = v - v_1$ и $v_1v_2 = 0$, из последнего очевидно, что одна из скоростей после удара обращается в ноль. Естественно выбрать $v_1 = 0$, $v_2 = v$, другой выбор отвечает отсутствию удара, когда шарик продолжил движение, а тело осталось неподвижным.

В нашем случае во время удара шарик проходит положение равновесия, а следовательно его скорость максимальна и равна v_m . В самом деле, чтобы сдвинуть шарик из положения равновесия, надо совершить работу и, соответственно, затратить энергию. При колебаниях эта работа совершается за счет кинетической энергии. Значит, в положении равновесия кинетическая энергия и скорость шарика максимальны.

После удара тело движется вверх с той же начальной скоростью v_m , что и шарик до удара. Значит, уравнение его движения

$$y(t) = v_m t - gt^2/2, \quad v = v_m - gt,$$

где $y(t)$ - высота тела над столом, $v(t)$ - его скорость.

Найдем время, через которое тело вернется на стол. Это произойдет при $y = 0$, т.е. в момент $t = 2v_m/g$; скорость тела в этот момент составит $-v_m$, отрицательный знак означает, что тело движется вниз.

Далее вновь происходит абсолютно упругий удар, после которого вся энергия передается шарiku, и он начинает движение вниз с начальной скоростью $-v_m$, сжимая пружинку. При этом груз начинает двигаться так же, как он бы двигался при свободных колебаниях. Значит время до следующего удара равно половине периода свободных колебаний шарика $T_0/2$. Это время, через которое шарик вернется в положение равновесия.

В итоге период движения нашей системы получается как сумма времени, которое тело проводит в полете над столом, т.е. $2v_m/g$, и половины периода движения груза на пружинке $T_0/2$.

Ответ: Период окажется равным $T = 2v_m/g + T_0/2$.

9 класс. Задача 5.

Обозначим массу тела без крыльев M , массу обоих крыльев m , искомую величину $M/m = x$.

Заметим, что на графике скорости есть точки (в моменты времени t_1 и t_2), где скорости и тела и крыльев равны нулю. Следовательно, в эти моменты кроме силы тяжести в проекции на вертикальную ось никакие силы на дракона не действуют. Будем рассматривать именно эти моменты времени.

Обозначим силу, с которой крылья тянут тело дракона вверх, через T . По третьему закону Ньютона, тело с такой же силой тянет крылья вниз. Тогда второй закон Ньютона для крыльев и тела в проекции на ось, направленную вниз, имеет вид соответственно

$$ma_1 = mg + T \quad Ma_2 = Mg - T,$$

где a_1 и a_2 – ускорение крыльев и тела соответственно. Сложив уравнения, исключим внутреннюю силу "натяжения" T , получим $ma_1 + Ma_2 = (m+M)g$. Разделив последнее равенство на m , получим

$$a_1 + xa_2 = g + xg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_1 - g}{g - a_2}.$$

Ускорения a_1 и a_2 можно найти из рис. 7, рассмотрев тангенсы углов наклона к графикам в точках, где они пересекают ось абсцисс. Так например, для момента t_1

$$a_1 = -\operatorname{tg} \alpha_1 = -3g \quad a_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 2g \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_1 - g}{g - a_2} = \frac{-3g - g}{g - 2g} = 4.$$

Вместо этого можно было воспользоваться куском графика в момент t_2 :

$$a'_1 = \operatorname{tg} \alpha'_1 = 9g \quad a'_2 = -\operatorname{tg} \alpha'_2 = -g \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a_1 - g}{g - a_2} = \frac{9g - g}{g - (-g)} = 4.$$

Так как измерения на графике могли сопровождаться погрешностью, использование обеих точек t_1, t_2 позволяет минимизировать эту погрешность.

Ответ: Масса дракона без крыльев относится к массе его крыльев как $M/m = 4$.

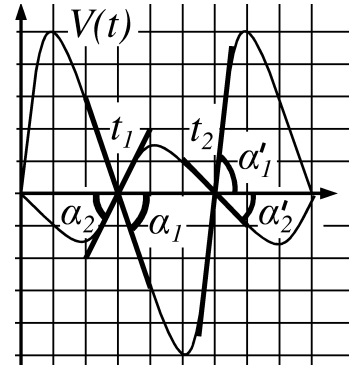
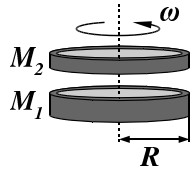
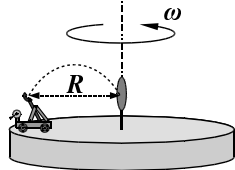
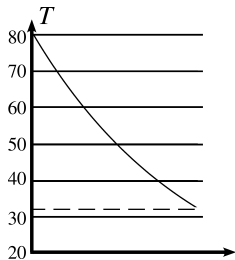
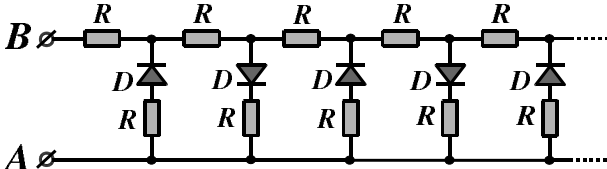
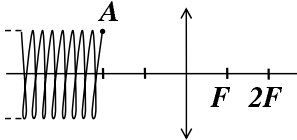


Рис. 7.

<p>1</p>	<p>На гладком столе лежит тонкое кольцо массы M_1 и радиуса R. На него сверху кладут шероховатое кольцо такого же радиуса, которое вращается с угловой скоростью ω. Масса верхнего кольца равна M_2. Пренебрегая трением нижнего кольца о стол, определите, какая угловая скорость вращения колец на столе установится через большой промежуток времени. Сколько тепла выделится при установлении этого вращения?</p>	
<p>2</p>	<p>Цезарь решил испытать своих легионеров. Он закрепил катапульту на краю вращающегося горизонтального диска радиуса R и велел попасть из нее в середину мишени, расположенной в центре диска (см. рис.). Катапульта может стрелять под любым углом к горизонту и в любом направлении со скоростью V. При каких значениях V легионеры смогут выполнить приказ Цезаря? Угловая скорость вращения диска равна ω, ускорение свободного падения g, сопротивлением воздуха пренебречь.</p>	
<p>3</p>	<p>Длинная труба обогревает ангар, в результате чего в нем установилась температура $T^* = 5^\circ\text{C}$. Через трубу поступает ежесекундно $\mu = 50$ кг воды при температуре $T_0 = 80^\circ\text{C}$, температура воды, вытекающей из ангара по трубе равна $T_1 = 32^\circ\text{C}$. Известно, что кусок трубы длиной Δl, имея температуру T, отдавал бы в среду с температурой T^* ежесекундно теплоту $P = \alpha \Delta l (T - T^*)$, где $\alpha = 4.2$ кДж/(м·°К). На рисунке приведен график зависимости температуры трубы T от расстояния до ее начала, однако масштаб графика по оси абсцисс стерся. Какова длина трубы в ангаре? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·°С).</p>	
<p>4</p>	<p>Бесконечная электрическая цепочка, изображенная на рисунке внизу, состоит из одинаковых идеальных сопротивлений R и элементов D (идеальных диодов). Идеальный диод пропускает ток без сопротивления, если ток течет по "стрелке", и не пропускает ток в обратном направлении. Экспериментатор стал исследовать зависимость напряжения между точками A и B от протекающего через схему полного тока, полученная им вольт-амперная характеристика приведена на графике справа (за положительное направление тока выбрано направление от точки B к точке A). Определите величину сопротивления R.</p>	
<p>5</p>	<p>Ось длинной пружины (цилиндрической винтовой линии) совпадает с оптической осью собирающей линзы, фокусное расстояние которой равно F (см. рис.). Начало пружины (точка A) находится на расстоянии $2F$ от плоскости линзы, расстояние между соседними витками пружины равно h. Из точки A по пружине начинает равномерно двигаться бусинка. Один виток она проходит за время T. Определите момент времени, когда скорость изображения бусинки в линзе станет в два раза меньше, чем скорость самой бусинки. Считать, что скорость перемещения бусинки вдоль оси пружины много меньше ее полной скорости.</p>	

10 класс. Задача 1.

Способ I

Так как в системе действует трение, часть механической энергии переходит в тепло.

На вращающиеся кольца не действуют внешних сил, тормозящих вращение. То есть верхнее кольцо раскручивает нижнее за счет того, что его собственное вращение тормозится. Строго говоря, кусочки верхнего и нижнего колец массы Δm_1 и Δm_2 , имея скорости V_1 и V_2 , с помощью силы трения обмениваются друг с другом импульсом, пока скорости вращения не выравняются (см. рис. 8). При этом закон сохранения импульса для маленьких кусочков в проекции на направление движения этих кусочков в данный момент всегда выполняется: $\Delta P = \Delta m_1 V_1 + \Delta m_2 V_2 = \text{const}$. Значит, и суммарная величина импульсов всех кусочков P , спроецированных на направление их движения, неизменна. В начальный момент, когда движется только верхнее кольцо, эта величина равна $M_2 \omega R$. В конце, когда угловые скорости вращения обоих колец стали равны одной и той же величине ω' , величина $P = (M_1 + M_2) \omega' R$, откуда

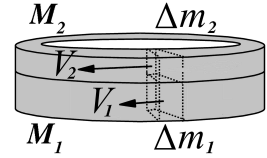


Рис. 8.

$$M_2 \omega R = (M_1 + M_2) \omega' R \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \omega.$$

Все точки вращающегося кольца имеют одну и ту же скорость. Значит, кинетическая энергия верхнего кольца первоначально $E = M_2 (\omega R)^2 / 2$. В конце оба кольца имеют одинаковую угловую скорость ω' , поэтому их кинетическая энергия $E' = (M_1 + M_2) (\omega' R)^2 / 2$. Разность этих энергий дает выделившееся в системе тепло

$$U = \frac{M_2 \omega^2 R^2}{2} - \frac{(M_1 + M_2) R^2}{2} \left(\frac{M_2}{M_1 + M_2} \omega \right)^2 = \frac{M_1 M_2 \omega^2 R^2}{2(M_1 + M_2)}.$$

Способ II

Известно, что момент инерции кольца массой M и радиуса R равен $I = MR^2$. Момент импульса системы из двух колец сохраняется, т.к. мы пренебрегаем трением нижнего кольца о стол. В итоге, кольца будут вращаться с одинаковой угловой скоростью ω' . Запишем закон сохранения момента импульса $I_2 \omega = I_1 \omega' + I_2 \omega'$; расписав моменты инерции получаем

$$M_2 R^2 \omega = M_1 R^2 \omega' + M_2 R^2 \omega' \quad \Rightarrow \quad \omega_k = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \omega.$$

Вращательная кинетическая энергия кольца имеет вид $E' = I \omega'^2 / 2$. Тогда закон сохранения энергии для нашей системы запишется следующим образом:

$$\frac{I_2 \omega^2}{2} = \frac{I_1 \omega'^2}{2} + \frac{I_2 \omega'^2}{2} + U,$$

где U – энергия, выделившаяся в виде тепла. Подставляя в эту формулу $I_{1,2} = M_{1,2} R^2$ и ω' , получаем

$$U = \frac{M_1 M_2 \omega^2 R^2}{2(M_1 + M_2)}.$$

Ответ: Установившаяся угловая скорость окажется равной $\omega' = M_2 \omega / (M_1 + M_2)$. Количество выделившегося тепла составит $U = M_1 M_2 \omega^2 R^2 / (2M_1 + 2M_2)$.

10 класс. Задача 2.

Разложим вектор начальной скорости вылета снаряда (относительно катапульти) на две составляющие $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$, где \vec{u} – компонента скорости по касательной к диску, а \vec{v} – вектор, лежащий в плоскости, перпендикулярной касательной (см. рис. 9).

Катапульта движется во время выстрела относительно мишени со скоростью ωR , поэтому и снаряд в момент выстрела имеет дополнительно эту скорость. Очевидно, что для попадания в цель, необходимо компенсировать эту скорость, т.е. положить $u = \omega R$, так чтобы относительно земли снаряд не имел составляющей скорости, направленной по касательной к диску.

Рассмотрим теперь вторую компоненту вектора скорости. Известно, что при фиксированной скорости максимальная дальность полета достигается при угле вылета равном 45° . Отсюда ясно, что для попадания в мишень с минимально возможной скоростью вылета, нужно, чтобы вектор \vec{v} составлял угол 45° с плоскостью диска.

Найдем величину этой компоненты. Уравнение движение снаряда:

$$x(t) = v \cos 45^\circ t, \quad y(t) = v \sin 45^\circ t - gt^2/2. \quad (2)$$

Из второго равенства, положив $y(t) = 0$, находим время полета $T = 2v \sin 45^\circ/g$. Подставляя T в первое из уравнений движения (2), получаем дальность $R = v \cos 45^\circ 2v \sin 45^\circ/g = v^2/g$. Следовательно $v^2 = gR$.

Таким образом, для минимальной скорости получаем следующее выражение: $V = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + gR}$

Ответ: При скорости $V \geq \sqrt{\omega^2 R^2 + gR}$.

10 класс. Задача 3.

Способ I

Обозначим длину трубы через L . Температура трубы меняется в трубе от точки к точке, поэтому введем функцию температуры трубы $T(x)$ в зависимости от расстояния x до ее начала.

Система находится в тепловом равновесии, поэтому напишем уравнение энергетического баланса. Рассмотрим отрезок трубы от точки x до точки $x + \Delta x$, считая, что длина Δx мала (см. рис. 10). Тогда можно считать, что температура выбранного куска постоянна и равна $T(x)$. Следовательно, энергия, отдаваемая в комнату этим отрезком трубы за единицу времени равна $W = \alpha \Delta x (T(x) - T^*)$.

Воду можно считать несжимаемой, поэтому за единицу времени в выбранный объем трубы втекает μ кг воды при температуре $T(x)$, и вытекает столько же, но уже при более низкой температуре $T(x + \Delta x)$. Таким образом, в единицу времени в выделенный объем вода привносит энергию $Q = c\mu(T(x) - T(x + \Delta x))$. Удобно ввести величину $\Delta T(x) \equiv T(x + \Delta x) - T(x)$ ($\Delta T(x) < 0$, так как температура уменьшается по мере удаления от начала), тогда $Q = -c\mu \Delta T(x)$. Так как труба находится в равновесии с воздухом в ангаре, то эта энергия и равняется энергии, выделяемой трубой, то есть $Q = W$. Отсюда получаем:

$$\alpha \Delta x (T(x) - T^*) = -c\mu \Delta T(x) \quad \Rightarrow \quad T(x) = T^* - \frac{c\mu}{\alpha} \frac{\Delta T(x)}{\Delta x}. \quad (3)$$

Обратимся теперь к графику. Несложно понять, что величина $\Delta T/\Delta x$ характеризует угловой коэффициент графика, приведенного в условии. Соотношение (3) позволяет, зная масштаб по оси ординат, восстановить масштаб оси абсцисс. Действительно, выберем на графике некоторую точку, например, начальную ($T = T_0 = 80^\circ\text{C}$), и проведем в ней касательную к графику. Введем произвольный масштаб длины, скажем, назовем точку пересечения полученной касательной с горизонталью $T = T_1$ через L^* и будем мерить длину трубы в единицах L^* (см. рис. 11). Соотношение (3) в этой точке имеет вид

$$T_0 = T^* + \frac{c\mu}{\alpha} \operatorname{tg} \gamma = T^* + \frac{c\mu (T_0 - T_1)}{\alpha L^*} \quad \Rightarrow \quad L^* = \frac{c\mu (T_0 - T_1)}{\alpha (T_0 - T^*)} = 32 \text{ м.}$$

Из графика с помощью линейки определим $L/L^* \simeq 1.5$, значит, длина трубы $L = 48$ метров. Так как измерения на графике связаны с погрешностью, можно строить касательные к графику в нескольких точках, и, усредняя результаты, уменьшать погрешность.

Способ II

Существует второй способ оценки, однако он менее точен, так как предполагает, что зависимость температуры от длины трубы приблизительно линейная, $T(x) \equiv T_0 + (T_1 - T_0)x/L$.

Чтоб найти полную выделяемую трубой мощность тепла, нужно просуммировать тепло ΔW , выделяемое каждым кусочком длиной Δx ; каждая из величин ΔW равна $Z(x) = \alpha \Delta x (T(x) - T^*)$. Суммирование сводится к нахождению площади под графиком $Z(x)$ в пределах от начала до конца трубы ($0 \leq x \leq L$). Это площадь трапеции, закрашенной на рисунке 11, она оказывается равной

$$W = ((T_0 - T_1)/2 - T^*)\alpha L = \alpha L \cdot 51^\circ.$$

С другой стороны, за единицу времени в трубу втекает μ воды при температуре T_0 , и вытекает столько же, но уже при температуре T_1 . Следовательно, полная энергия, которая привносится водой в комнату за единицу времени составляет $Q = c\mu(T_0 - T_1) = c\mu \cdot 48^\circ$. Приравнявая Q и W получаем ответ.

Ответ: Длина трубы приблизительно 50 м.

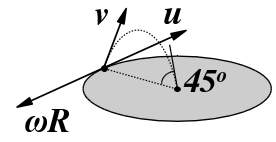


Рис. 9.

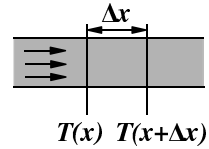


Рис. 10.

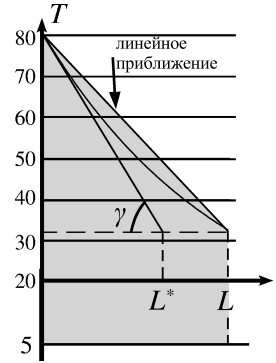


Рис. 11.

10 класс. Задача 4.

Способ I

Пронумеруем диоды так, как это показано на рис. 12.

Рассмотрим случай, когда ток в цепочке течет от точки A к точке B . Это соответствует области $I < 0$ на графике. Тогда все *четные* диоды будут работать как бесконечные сопротивления, и следовательно ток через них не потечет, а все *нечетные* диоды будут оказывать нулевое сопротивление. Нарисуем эквивалентную схему в этом случае (см. рис. 13).

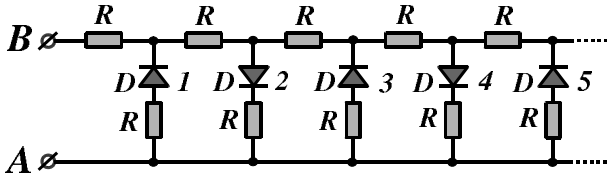


Рис. 12.

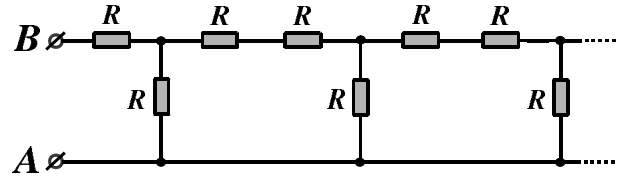


Рис. 13.

Обратимся теперь к случаю $I > 0$, когда ток течет в обратном направлении, от точки B к точке A . Тогда все *нечетные* диоды превратятся в бесконечные сопротивления, а сопротивления *четных* окажется равным нулю. Эквивалентная схема изображена на рисунке 14.

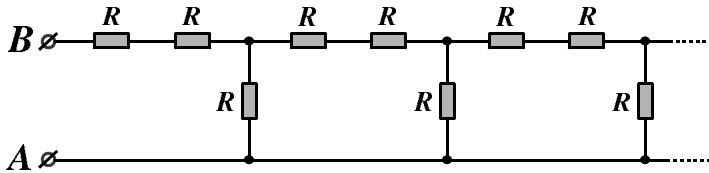


Рис. 14.

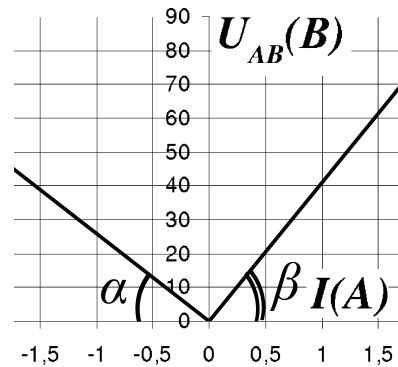


Рис. 15.

Легко заметить, что схема для случая $I > 0$ получается из схемы для случая $I < 0$ добавлением сопротивления R , подключенного последовательно. Обозначим сопротивление схемы для случая $I < 0$ через $R_<$. Тогда сопротивление схемы для случая $I > 0$ равно $R_> = R_< + R$. Из графика зависимости U от I сопротивление по закону Ома можно найти как угловой коэффициент наклона (тангенс угла наклона). Выбрав на каждой ветви графика произвольную точку, получаем $R = \text{tg } \beta - \text{tg } \alpha \approx 60\text{В}/1,5\text{А} - 40\text{В}/1,5\text{А} \approx 13 \text{ Ом}$.

Способ II

Как уже утверждалось выше, для случая тока, текущего в отрицательном направлении, схему можно перерисовать, как это показано на рис. 13. Сопротивление этой бесконечной цепочки можно подсчитать методом индукции. Оно оказывается равным $R_< = \sqrt{3}R$. По закону Ома, $U_< = IR_<$. Теперь, взяв любую удобную точку с левой ветви графика, нетрудно получить ответ.

Аналогично можно было явно посчитать сопротивление схемы для положительного направленного тока, пользуясь эквивалентной схемой 14.

Ответ: $R \approx 13 \text{ Ом}$.

10 класс. Задача 5.

Ясно, что бусинка, центр линзы O и изображение все время находятся на одной прямой. Поэтому, для того, чтобы понять, как будет устроена траектория изображения, достаточно смотреть только на движение предмета вдоль оси системы. Рассмотрим изображение точек винтовой линии, лежащих на горизонтальной прямой, проходящей через точку A . Очевидно, все они принадлежат отрезку MN (см. рис. 16; на рисунке изображена плоскость, в которой находятся оптическая ось, изображение и бусинка).

Таким образом, траектория изображения бусинки представляет собой винтовую линию с уменьшающимся радиусом и шагом спирали. Изображение проходит один виток за время T , так же как и сама бусинка.

По условию, скорость движения бусинки вдоль оси много меньше полной скорости, поэтому, пренебрегая продольными составляющими скоростей, можно считать, что движение происходит по окружностям. Длина окружности, по которой движется бусинка в некоторый произвольный момент $2\pi|EB|$, изображение при этом движется по окружности длиной $2\pi|DC|$ (см. рис. 17). Тогда их скорости можно найти

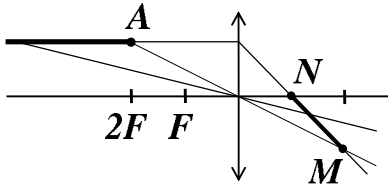


Рис. 16.

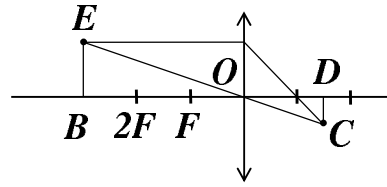


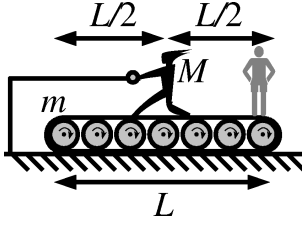
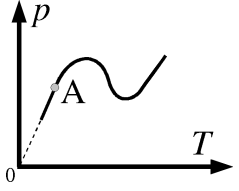
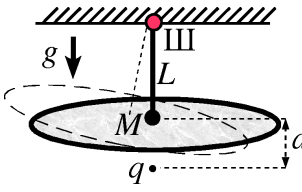
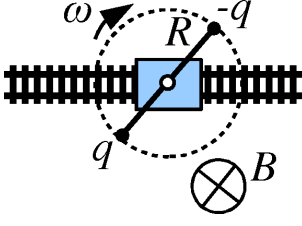
Рис. 17.

по следующим формулам $V_1 = 2\pi|EB|/T$ и $V_2 = 2\pi|DC|/T$ соответственно, а отношение скоростей будет равняться $V_1/V_2 = |EB|/|DC|$. Нам нужно подобрать отношение $V_1/V_2 = 2$, следовательно $|EB|/|DC| = 2$. Прямоугольные треугольники OEB и OCD подобны по трем углам, значит $|OB|/|OD| = |EB|/|DC| = 2$. Теперь запишем уравнение тонкой линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{|OB|} + \frac{1}{|OD|}$$

зная, что $|OD| = |OB|/2$ находим $|OB| = 3F$. Следовательно, бусинка прошла вдоль оптической оси расстояние $|OB| - 2F = F$, а скорость её вдоль оси равна h/T , где h – шаг винтовой линии. Отсюда получаем искомое время $t = FT/h$.

Ответ: Скорость изображения станет в два раза меньше скорости бусинки через время $t = FT/h$.

1	<p>Тренажер для бега представляет собой ленту-гусеницу массы m, которая может свободно вращаться вокруг барабанов (см. рисунок). Барабаны легкие, они вращаются без трения вокруг неподвижных осей. Первоначально спортсмен держится за поручень и бежит на месте, отталкивая ленту назад, скорость бега относительно ленты V. В некоторый момент бегун отпускает поручень, прекращает бежать по ленте и, за пренебрежимо малое время, останавливается относительно нее. За какое время он доедет до конца тренажера? Длина тренажера L, масса спортсмена M, первоначально он находился посередине. Тренажер не сдвигается относительно пола.</p>	
2	<p>Идеальный одноатомный газ, участвует в квазистатическом процессе, при котором давление p зависит от температуры T как изображено на графике, количество вещества газа неизменно. Найдите все точки графика, которые соответствуют моментам, когда теплоемкость газа такая же, как в точке А.</p>	
3	<p>Дельфин, находящийся на глубине h, слышит писк летучей мыши, летающей над морем на высоте H, а летучая мышь слышит крик дельфина. Скорость звука в воздухе c, а в воде c'. Первоначально дельфину кажется, что источник звука расположен под углом α к вертикали. Известно, что если дельфин и мышь будут двигаться прямо на звук, они встретятся максимально быстро (через минимально возможное время). Во сколько раз скорость дельфина отличается от скорости летучей мыши?</p>	
4	<p>Тяжелое крепление в виде маленького шара массы M соединяет жестко стержень длиной L и середину тонкого круглого металлического диска. Второй конец стержня прикреплен к потолку шарниром Ш, так что вся конструкция может качаться, при этом стержень всегда перпендикулярен диску (см. рисунок). Снизу, точно под шарниром, на расстоянии a от диска закрепляют точечный заряд q. Найдите период малых колебаний конструкции. Диск заземлен, величина a мала по сравнению с L и с радиусом диска, стержень и диск легкие. Ускорение свободного падения g, сопротивлением воздуха пренебречь.</p>	
5	<p>Тележка массой M укрепена на рельсах. На тележке расположена вертушка, на ее концах, на расстоянии R от оси вращения, имеются заряды q и $-q$ (см. рисунок, вид сверху). Двигатель вращает вертушку с постоянной угловой скоростью ω, при этом заряды движутся в вертикальном магнитном поле индукции B. В момент, когда вертушка параллельна рельсам, тележку освобождают. Найдите координаты тележки на рельсах как функцию времени. Трение тележки о рельсы пренебрежимо мало. Как изменится ответ задачи, если тележку освободить в момент, когда вертушка перпендикулярна рельсам?</p>	

11 класс. Задача 1

Когда спортсмен прекращает бежать, лента начинает его разгонять, и при этом сама тормозится. Это эквивалентно тому, что масса ленты увеличилась до $M + m$. Первоначально каждая точка ленты имеет скорость V (относительно земли). Обозначим скорость ленты, когда бегун перестал по ней бежать, V' .

Поскольку спортсмену удается затормозить относительно тренажера, между лентой и спортсменом действует сила трения. Значит, полная энергия в системе не сохраняется.

Однако, лента и спортсмен, рассматриваемые как единая система, взаимодействуют только с барабанами и гравитационным полем Земли. Ни барабаны, ни гравитация не тормозят вращение ленты, то есть на систему "лента + спортсмен" не действует внешняя тормозящая сила.

Поэтому спортсмен приобретает импульс за счет того, что лента его теряет:

$$mV = (m + M)V' \quad \Rightarrow \quad V' = mV/(M + m).$$

Двигаясь с такой скоростью относительно земли спортсмен сдвинется на $L/2$ и окажется на краю тренажера через время $L/(2V')$.

Ответ: Через время $(M + m)L/(2mV)$ спортсмен окажется на краю тренажера.

11 класс. Задача 2.

В окрестности точки А давление пропорционально температуре

$$p = \alpha T. \quad (4)$$

Уравнение Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$ должно выполняться в каждой точке процесса.

Подставляя в него (4), получим, что в окрестности точки А справедливо

$$(\alpha T)V = \nu RT \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\nu R}{\alpha} = \text{const.}$$

Иными словами, в точке А газ нагревается изохорически.

При этом теплоемкость газа равна, очевидно, $C = C_V = 3\nu R/2$.

Такую теплоемкость газ имеет в любом изохорическом процессе, то есть всегда, когда давление меняется пропорционально температуре. На графике этим моментам соответствуют точки, в которых касательная к графику проходит через начало координат.

Соответствующие точки графика выделены на рис. 18

Ответ: См. точки, выделенные на рис. 18: отрезок, содержащий точку А, а также точка В.

11 класс. Задача 3.

Звук, имея различную скорость в воде и воздухе, преломится на границе раздела сред, подчиняясь закону Снелиуса

$$\sin \beta = \frac{c}{c'} \sin \alpha, \quad (5)$$

где c/c' – относительный показатель преломления звука в воде по сравнению с воздухом, см. рис. 19.

Докажем, что в случае наискорейшей встречи дельфин и мышь двигаются одно и то же время (никто никого не ждет у поверхности). Действительно, если бы, например, при наискорейшей встрече дельфину пришлось бы ждать мышь в некоторой точке у поверхности, более выгодным способом действий было бы переместить точку встречи ближе к точке А, чтобы сократить путь мыши. Единственная ситуация, когда одному из животных (пусть, дельфину) пришлось бы ждать, – когда дельфин успевает подплыть к точке А, и ждет в ней мышь.

Однако, по условию известно, что ни одному из животных не выгодно двигаться вертикально. Значит, ни одно из них не ждет другое, и, следовательно, времена их движения равны:

$$\frac{h}{V_D \cos \alpha} = \frac{H}{V_M \cos \beta}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_D}{V_M} = \frac{h \cos \beta}{H \cos \alpha}.$$

где V_D и V_M – скорости дельфина и мыши соответственно. Выражая $\cos \beta$ в последнем выражении через синус, и подставляя выражение для $\sin \beta$ из (5), получим

$$\frac{V_D}{V_M} = \frac{h \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{H \cos \alpha} = \frac{h \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha / c'^2}}{H \cos \alpha}. \quad (6)$$

Ответ: Отношение скоростей задается формулой (6), выражение под корнем в числителе больше нуля – в противном случае двигаться на звук не может быть выгодно.

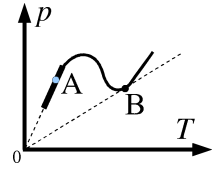


Рис. 18.

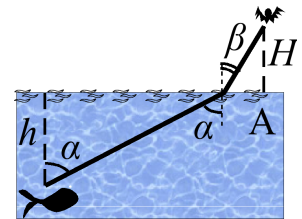


Рис. 19.

11 класс. Задача 4.

Решение 1.

Пусть система качается вокруг положения равновесия, и стержень отклонился на малый угол α (см. рис. 20, где стержень из вертикального положения ШК переместился в положение ШС). Если кинетическая энергия при этом уменьшится на $k_1\omega^2/2$ (здесь ω – угловая скорость вращения стержня в момент, когда угол отклонения α : $\omega = \dot{\alpha}$), а потенциальная увеличится на $k_2\alpha^2/2$, то период гармонических колебаний имеет вид $T = 2\pi\sqrt{k_1/k_2}$. Поэтому необходимо найти коэффициенты k_1 и k_2 .

Найти коэффициент k_1 просто – кинетическая энергия крепления $MV^2/2$, где скорость крепления связана с угловой скоростью стержня $V = L\omega$. Поэтому $k_1 = ML^2$.

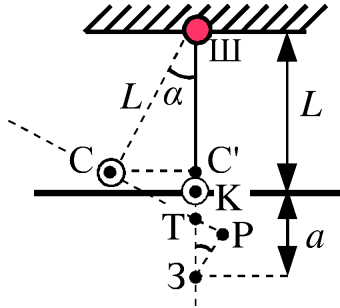


Рис. 20.

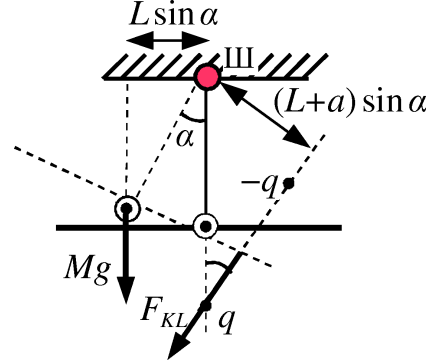


Рис. 21.

Разберемся с потенциальной энергией.

Согласно методу зеркальных изображений, металлический диск притягивает заряд q также, как заряд $-q$, расположенный за плоскостью зеркально относительно q . Однако энергия их взаимодействия $E = -kq^2/(4a)$ в два раза меньше, чем имели бы заряды q и $-q$, расположенные на расстоянии $2a$. Этот известный результат метода зеркальных изображений связан с тем, что заряд и плоскость создают такие же силовые линии, как заряды q и $-q$, но только *перед* металлической плоскостью, силовых же линий *за* металлической плоскостью нет, поэтому энергию зарядов $-kq^2/(2a)$ следует для случая плоскости разделить пополам. Отметим также, что энергия взаимодействия разноименных зарядов отрицательна. Когда стержень отклонился, расстояние между зарядом 3 и плоскостью изменилось и стало равно $|ЗР| = a'$. Так как $|ШЗ| = |ШК| + |КЗ| = L + a$, а с другой стороны $|ШЗ| = |ШТ| + |ТЗ| = L/\cos\alpha + a'/\cos\alpha$, значит

$$L + a = \frac{L}{\cos\alpha} + \frac{a'}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad a' = (L + a)\cos\alpha - L,$$

а изменение потенциальной энергии кулоновского взаимодействия

$$\Delta E_{KL} = \frac{-kq^2}{4a'} - \frac{-kq^2}{4a} = \frac{-kq^2}{4a} \left(\frac{a}{a'} - 1 \right) = -\frac{kq^2}{4a} \left(\frac{(L+a)(1-\cos\alpha)}{(L+a)\cos\alpha - L} \right).$$

Так как угол α мал, $\cos\alpha \simeq 1$, знаменатель последнего выражения можно упростить до a . Числитель содержит $(1 - \cos\alpha)$, который можно выразить из известного тригонометрического тождества:

$$1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2(\alpha/2) \simeq 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2}. \quad (7)$$

в последнем равенстве мы также воспользовались малостью угла $\alpha/2$. Таким образом, изменение кулоновской энергии

$$\Delta E_{KL} = -\frac{kq^2}{4a} \frac{(L+a)\alpha^2}{2a} \simeq -\frac{kq^2 L \alpha^2}{4a^2 \cdot 2}.$$

Потенциальная энергия гравитационного поля при отклонении стержня на α меняется на $Mg|C'K|$, где $|C'K| = L(1 - \cos\alpha) \simeq L\alpha^2/2$ (мы снова воспользовались соотношением (7)). Полное изменение потенциальной энергии, таким образом,

$$MgL\frac{\alpha^2}{2} - \frac{kq^2(L+a)\alpha^2}{4a^2} \frac{\alpha^2}{2} = \frac{k_2\alpha^2}{2}, \quad \text{где} \quad k_2 = MgL - \frac{kq^2(L+a)}{4a^2} \simeq MgL - \frac{kq^2 L}{4a^2}.$$

Отсюда следует ответ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - kq^2/(4Ma^2)}}.$$

Видно, что разность в знаменателе может обратиться в ноль. Физически это соответствует ситуации, когда заряд достаточно велик и диск притягивается к нему и прилипает. Разумеется, при этом колебания в системе не возникают.

Решение 2.

Если колебания происходят лишь под действием силы тяжести, то в системе, выведенной из равновесия, возникает момент силы тяжести $MgL \sin \alpha$ (см. рис. 21), возвращающий систему в положение равновесия. Когда кроме силы тяжести на плоскость действует дополнительная электрическая сила Кулона F_{KL} , которая находится из метода зеркальных изображений $F_{KL} = kq^2/(4a^2)$, она также создает момент, но этот момент мешает моменту силы тяжести вернуть систему обратно. Расстояние от заряда до плоскости слабо меняется при колебаниях на малый угол, поэтому и F_{KL} почти постоянна, плечо этой силы $(L + a) \sin \alpha \simeq L \sin \alpha$, (величиной a по сравнению с L можно пренебречь). В результате суммарный момент всех сил оказывается равным

$$MgL \sin \alpha - \frac{kq^2}{4a^2} L \sin \alpha.$$

Поэтому дополнительная сила эффективно сводится к уменьшению силы тяжести

$$Mg \rightarrow Mg - \frac{kq^2}{4a^2},$$

или к уменьшению величины ускорения свободного падения

$$g \rightarrow g - \frac{kq^2}{4Ma^2}.$$

Соответственно изменится и период:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - kq^2/(4Ma^2)}}.$$

Ответ: период колебания системы

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - kq^2/(4Ma^2)}},$$

колебания происходят, лишь если знаменатель под корнем не обращается в ноль, в противном случае диск прилипнет к заряду.

Любопытно, что хотя сила взаимодействия заряда с изображением тянет плоскость *вниз*, в результате она *ослабляет* действие гравитации.

11 класс. Задача 5.

На каждый из двух зарядов,двигающихся в магнитном поле, действует сила Лоренца $F = qB\omega R$, (см. рис. 22). Направление F для положительного заряда определяется по правилу левой руки; второй заряд движется в противоположную сторону, но поскольку этот заряд отрицателен, F для него направлена туда же, что и F первого заряда. Проекции сил F на направление рельсов Ox будут обеспечивать ускорение тележки, проекции же на перпендикулярное рельсам направление не влияют на движение.

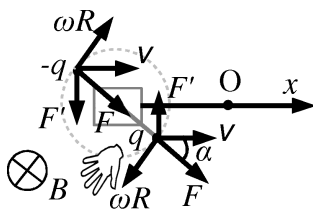


Рис. 22.

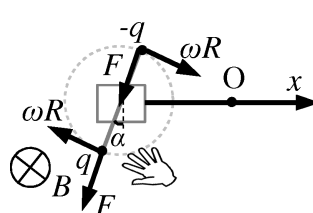


Рис. 23.

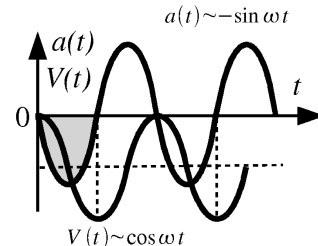


Рис. 24.

Когда тележка уже движется, кроме вращательной скорости ωR заряды имеют дополнительно поступательную скорость V тележки, этой компоненте скорости также соответствует сила Лоренца $F' = qBV$, однако легко понять, что направлена каждая из этих сил перпендикулярно рельсам (см. рис. 22).

Итак, если в некоторый момент вертушка повернулась на угол $\alpha = \omega t$ к рельсам, уравнение движения тележки имеют вид

$$Ma = 2F \cos(\omega t). \tag{8}$$

Это уравнение колебательного движения. Несложно восстановить зависимости скорости и координаты частицы от времени:

$$V(t) = \frac{2F}{M\omega} \sin(\omega t), \quad x(t) = -\frac{2F}{M\omega^2} \cos(\omega t) = -\frac{2qBR}{M\omega} \cos(\omega t)$$

Понятно, что первоначально (при $t = 0$, когда $\alpha = 0$) скорость тележки равна нулю, тележка ускоряется в сторону положительного заряда (на нашем рисунке – направо). При этом в момент $t = 0$ координата тележки равна $x_0 = -2qBR/(M\omega)$. Это позволяет найти начало координат O , т.е. точку, вокруг которой происходят колебания. Очевидно, она расположена на нашем рисунке справа от первоначального положения тележки – только тогда вначале тележка имеет отрицательную координату.

В случае, когда первоначально вертушка располагалась перпендикулярно рельсам, угол $\alpha = \omega t$ следует отсчитывать от вертикали. Тогда уравнение движения (8) заменится на (см. рис. 23)

$$Ma = -2F \sin(\omega t). \quad (9)$$

При этом зависимость $V(t)$ не может иметь, казалось бы, очевидный вид

$$V(t) = \frac{2F}{M\omega} \cos(\omega t),$$

так как при $t = 0$ это выражение дает начальную скорость $V_0 = (2F/M\omega) \neq 0$, в то время как по условию в начальный момент тележка покоилась. Значит, центр гармонических колебаний должен двигаться с постоянной скоростью $-2F/(M\omega)$, чтобы в начальный момент скорость обращалась в ноль:

$$V_0 = -\frac{2F}{M\omega} + \frac{2F}{M\omega} \cos(\omega t).$$

Такое равномерное движение центра колебаний эквивалентно переходу в другую систему отсчета и не влияет на второй закон Ньютона (9).

Этот результат можно также получить, нарисовав график функции $a(t)$, полученный из (9), восстановив $V(t)$ как площадь под этим графиком. При этом график скорости должен выходить из начала координат (см. рис. 24). Заштрихованная площадь на графике $a(t)$, например, дает численное значение максимального по модулю значения скорости. Из восстановленного графика для $V(t)$ видно, что центр синусоиды $V(t)$ сдвинут по вертикали, скорость всегда направлена против оси Ox , и тележка в среднем едет влево.

Таким образом, координата тележки во втором случае будет

$$x(t) = -\frac{2F}{M\omega} t + \frac{2qBR}{M\omega} \sin(\omega t).$$

Ответ: Тележка совершает гармонические колебания, $x(t) = -2qBR/\cos(\omega t)/(M\omega)$, центр колебаний смещен на $2qBR/(M\omega)$ от первоначального положения тележки в сторону, где был положительный заряд в начальный момент времени.

Во втором случае координата тележки $x(t) = -2qBRt/M + 2qBR \sin(\omega t)/(M\omega)$, центр гармонических колебаний в начальный момент совпадает с положением тележки, а затем смещается с постоянной скоростью $2qBR/M$ в сторону, в которую движется отрицательный заряд в начальный момент времени.