Тема урока: **Принцип Дирихле в геометрии**

При решении многих задач используется логический метод рассуждения — "от противного"- принцип Дирихле. Принцип назван в честь немецкого математика Дирихле (1805-1859), который успешно применял его к доказательству арифметических утверждений. Самая популярная формулировка принципа Дирихле звучит так:

"*Если в n клетках сидит n+1 или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят по крайней мере два зайца"*.

Нужно заметить, что в роли зайцев могут выступать различные предметы и математические объекты - числа, отрезки, места в таблице и т. д.
В литературе этот принцип встречается под названиями: "принцип кроликов и клеток", "принцип ящиков и объектов".

Несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать "зайцем", что - "клеткой", и как использовать наличие двух "зайцев", попавших в одну "клетку". С помощью принципа Дирихле обычно доказывается существование некоторого объекта, не указывая, вообще говоря, алгоритм его нахождения или построения. Это даёт так называемое неконструктивное доказательство - мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть.

Некоторые задачи, в особености геометрические, решаются при использовании принципа Дирихле в следующих формулировках:

a)

Если на отрезке длиной l расположены несколько отрезков, сумма длин которых больще l, тогда по крайней мере два отрезка имеют общий точку;

b)

Если внутри фигуры площадью S расположены фигуры, сумма площадей которых больше S, тогда среди них существуют хотя бы две фигуры, имеющие общую точку;

c)

Если фигуры $F_1,F_2, \dots ,F_n$ $S_1,S_2, \dots ,S_n$ - соответственно их площади) расположены в фигуре F площадью S и $S_1 + S_2 + \dots + S_n > kS$, тогда $k + 1$ из фигур $F_1,F_2, \dots ,F_n$ имеют общую точку.

Задача 1. Точки на плоскости раскрашены двумя цветами. Показать, что существуют две точки одинакового цвета, расположенные на расстоянии 1м.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1м. Вершины треугольника будут "предметами", а цвета - "коробками". Так как число "предметов" больше числа "коробок", следует, что существуют две вершины одного цвета. Поскольку треугольник равносторонний, расстояние между вершинами составляет 1м.

Отметим, что эта задача может быть решена и другим методом - от противного. Пусть *A* - одна из точек плоскости, и предложим, что все точки плоскости, расположенные на расстоянии 1м от *A*, окрашены в цвет, отличный от цвета точки *A*. Тогда получаем окружность радиуса 1 из точек одинакового цвета. Очевидно, что в этой окружности существует хорда длиной 1м. Следовательно, концами хорды будут точки одного цвета, расположенные на расстоянии 1м.

Задача 2. На плоскости даны *n* различных точек. Пара точек определяет отрезок. Доказать, что существуют две точки, из которых выходит одинаковое число отрезков.

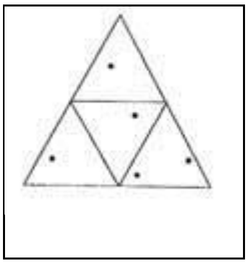
Решение. Из одной точки может выходить максимум *n* - 1 отрезков и минимум 1 отрезок. Поскольку имеются *n* точек, то найдутся две такие, из которых выходит одинаковое число отрезков.

Задача 3. Внутри квадрата со стороной 1 находятся несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Показать, что существует прямая, пересекающая не менее четырех из этих окружностей.

Решение. Проецируем окружности на одну из сторон квадрата. Проекция каждой окружности представляет собой отрезок, длина которого равна диаметру соответствующей окружности. Сумма этих отрезков равна $\frac{10}{\pi} > 3,1.$ Согласно принципу Дирихле, существуют хотя бы четыре отрезка, имеющие общую точку. Перпендикуляр, проведенный из этой точки на сторону квадрата, пересечет не менее четырех окружностей.

Задача 4. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 лежат 5 точек. Доказать, что найдутся две точки из пяти, расстояние между которыми меньше 0,5.

Решение.



Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольничка со стороной 0,5. Назовём их "клетками", а точки будем считать "зайцами". По принципу Дирихле из пяти точек хотя бы две окажутся в одном из четырёх треугольничков (См. рисунок). Расстояние между этими точками меньше 0,5, поскольку точки не лежат в вершинах треугольничков. (Здесь использована известная лемма о том, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, меньше длины его наибольшей стороны.)

Задача 5. На плоскости даны 25 точек таким образом, что две точки из любых трех расположены на расстоянии меньше 1. Доказать, что существует круг радиуса 1, содержащий не менее 13 из данных точек.

Решение. Пусть A - одна из данных точек. Если остальные точки находятся внутри круга S_1 радиуса 1 с центром в точке A, тогда задача решена. Пусть B - одна из точек, лежащих вне круга S_1. Рассмотрим круг S_2 радиуса 1 с центром в точке B. Среди точек A, B, C, где C - произвольная из данных точек, существуют две, расстояние между которыми меньше 1. Более того, этими точками не могут быть A и B.

Таким образом, круги S_1 и S_2 содержат все исходные точки. То есть, один из этих кругов содержит не менее 13 точек.

Задача 6. На плоскости даны n попарно непараллельных прямых. Показать, что существуют прямые, угол между которыми составляет менее $\frac{180°}{n}$.

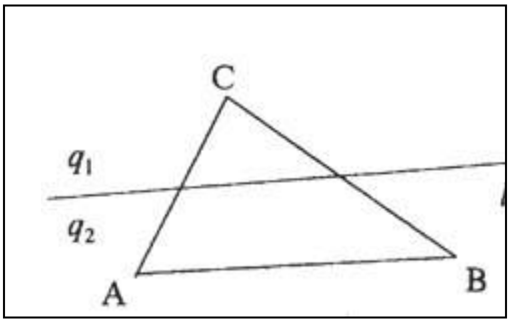
Решение. Выбираем на плоскости точку, через которую проводим прямые, параллельные данным n прямым. Эти прямые разбивают плоскость на $2n$ углов, сумма величин которых равна 360°. То есть, по крайней мере один из углов будет меньше $\frac{180°}{n}$.

Задача 7. На бесконечную сетку помещена фигура, площадь которой меньше площади квадратика сетки. Доказать, что эта фигура может быть размещена на сетке так, чтобы она не покрывала узлы сетки.

Решение. Размещаем данную фигуру на сетке произвольным образом и разрезаем сетку вдоль сторон. Складываем все квадратики сетки один на другой, образуя стопку, при этом совершая только параллельные перемешения (без поворотов). Проецируем фигуру на один квадратик. Проекции фигуры не могут покрывать весь квадратик, так как его площадь больше площади фигуры. Возвращаемся к исходному положению фигуры и переносим сетку параллельно, таким образом, чтобы проекции вершин располагались внутри фигуры. В результате мы получим искомое положение фигуры.

<u>Задача 8</u>. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

<u>Решение.</u>



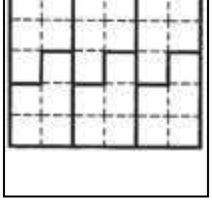
Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут "зайцами", а полуплоскости q_1 и q_2 - "клетками". Каждый "заяц" попадает в какую-нибудь "клетку" (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C). Так как "зайцев" три, а "клеток" только две, то найдутся два "зайца", попавшиев одну "клетку"; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости. См рисунок.

Пусть, скажем, точки A и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Обобщенный принцип Дирихле также достаточно очевиден: если бы в каждой клетке сидело не более k зайцев, то во всех клетках было бы не более nk зайцев, что противоречит условию. Обобщение принципа используют, когда требуется выявить несколько (три и более) объектов, обладающих некоторым свойством. Разберём несколько примеров.

<u>Задача 9.</u> В прямоугольнике 5×6 закрашено 19 клеток. Докажите, что в нём можно выбрать квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трёх клеток.

<u>Решение.</u>



Разделим прямоугольник на 6 частей по 5 клеток (См. рисунок). Согласно принципу Дирихле в одной из этих частей будет закрашено не менее 4 клеток. Тогда в квадрате 2×2, содержащемся в этой части, закрашено либо 3, либо 4 клетки. Это и будет искомый квадрат.

<u>Задача 10.</u> В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Доказать, что найдётся прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

<u>Решение.</u> Спроектируем все круги на произвольный диаметр AB большого круга (AB = 6). Сумма длин проекций, очевидно, равна сумме диаметров кругов, т.е. 50. Поскольку 50 > 8AB, то на отрезке AB есть точка, принадлежащая проекциям по крайней мере девяти кругов. Прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная диаметру AB, - искомая.

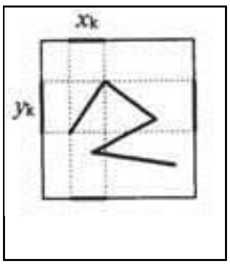
<u>Задача 11.</u> Дана фигура площади больше N. Доказать, что в ней найдутся N+1 точек, разности соответствующих координат которых - целые числа.

<u>Решение</u> Разобьём исходную фигуру параллельными прямыми, расположенными на расстоянии 1, на клетки. (В качестве таких прямых можно взять, например, линии целочисленной сетки.) Некоторые клетки будут покрываться фигурой полностью, другие - лишь частично. Выделим какую-нибудь одну клетку и с помощью параллельных переносов перенесём на эту клетку все кусочки фигуры, которые получились в результате её пересечения со всеми клетками. {Наглядно это можно описать так. Представьте, что фигура нарисована на клетчатой бумаге. Разрежьте бумагу по клеткам и сложите их в стопку, перенося их параллельно и не переворачивая, а затем спроектируйте стопку на выделенную клетку.}

Площади проекций частей фигуры в сумме дадут площадь самой фигуры, т.е. больше N. Поэтому на выделенной клетке (площади 1) согласно принципу Дирихле найдётся точка X, покрытая не менее N+1 кусочками фигуры. Вернёмся теперь к исходной фигуре и отметим на ней N+1 точек, проектирующихся в точку X при переносе клеток. Эти точки будут искомыми, т.к. после переноса кусочка фигуры в выделенную клетку координаты каждой точки этого кусочка изменяются на целое число.

<u>Задача 12.</u> В кубе с ребром a лежит ломаная, которую каждая плоскость, параллельная одной из граней, пересекает не более k раз. Доказать, что длина ломаной меньше 3ka.

<u>Решение.</u> Введём в пространстве прямоугольную систему координат, оси которой направим вдоль рёбер куба. Пусть ломаная состоит из нескольких отрезков, длины которых мы обозначим через L_k.



Пусть x_k, y_k, z_k - проекции отрезка L_k на оси координат. Тогда $L_k = [Ц(x^2_k+y^2_k+z^2_k)]$. Задачу будем решать методом от противного. Допустим, что длина ломаной не меньше 3ka. Тогда попробуем найти плоскость, параллельную одной из граней, которая пересечёт ломаную не менее чем в k+1 точках. Спроектируем ломаную на три грани куба, расположенные в плоскостях XOY, YOZ и XOZ, и рассмотрим одну из таких проекций, например, XOY (См. рисунок).

Каждый k-ый отрезок спроектированной ломаной образует также 4 проекции на сторонах квадрата, сумма длин которых равна $2(x_k + y_k)$. Если сложить длины всех таких проекций для каждого отрезка, то получим $S2(x_k + y_k)$. Если бы эта величина была больше 4ka (т.е. более чем в k раз превосходила периметр квадрата), то по принципу Дирихле на одной из сторон квадрата нашлась бы точка, покрытая не менее чем k+1 проекциями. Тогда прямая, проведенная через эту точку и параллельная стороне квадрата, пересечёт проекцию исходной ломаной не менее чем в k + 1 точках. Значит, если через эту прямую провести плоскость, параллельную грани, то она пересечет исходную ломаную по крайней мере в k + 1 точках.

Осталось показать, что для одной из трёх граней, на которые проектировалась ломаная, сумма длин проекций, лежащих на сторонах квадрата, будет больше 4ka, т.е. одна из величин $S2(x_k + y_k)$, $S2(z_k + y_k)$, $S2(x_k + z_k)$ больше 4ka. Длина ломаной равна $SL_k = S[Ц(x^2{}_k+y^2{}_k+z^2{}_k)]$ и по предположению не меньше 3ka. Поэтому получаем

3ka J S ____________ <

__ $S(x_k+y_k+z_k)$ =

$Цx^2{}_k+y^2{}_k+z^2{}_k$

= $(1/4)\cdot(S2(x_k+y_k) + S2(y_k+z_k) + S2(x_k+z_k))$,

откуда

$S2(x_k+y_k) + S2(y_k+z_k) + S2(x_k+z_k) > 3\cdot4ka$.

Если сумма трёх слагаемых больше 3·4ka, то по крайней мере одно из них больше 4ka, что и требовалось.

Список литературы

[1] Андреев А.А., Горелов Г.Н., Люлев А.И., Савин А.И. "Принцип Дирихле", Самара "Пифагор", 1997г

[2] И. Л. Бабинская. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

[3] Д. Х. Муштари. Подготовка к математическим олимпиадам: задачи, темы, методы. Казанский ун-т, 1990.

[4] В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Ч. 2. М.: Наука, 1991.

[5] В. Г. Болтянский. Шесть зайцев в пяти клетках. // Ж-л «КВАНТ», 1977,No2.

[6] А. А. Леман. Сборник задач московских математических олимпиад. Под ред. В.Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.

[7] Ю. Ф. Фоминых. Принцип Дирихле. // Ж-л «Математика в школе», 1996, No3.